Alla ricerca del minimo: la matematica nella vita quotidiana

DIPARTIMENTO MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Carlo Mariconda

800 1222·2022 ANNI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

iis MarzottoLuzzatti Valdagno

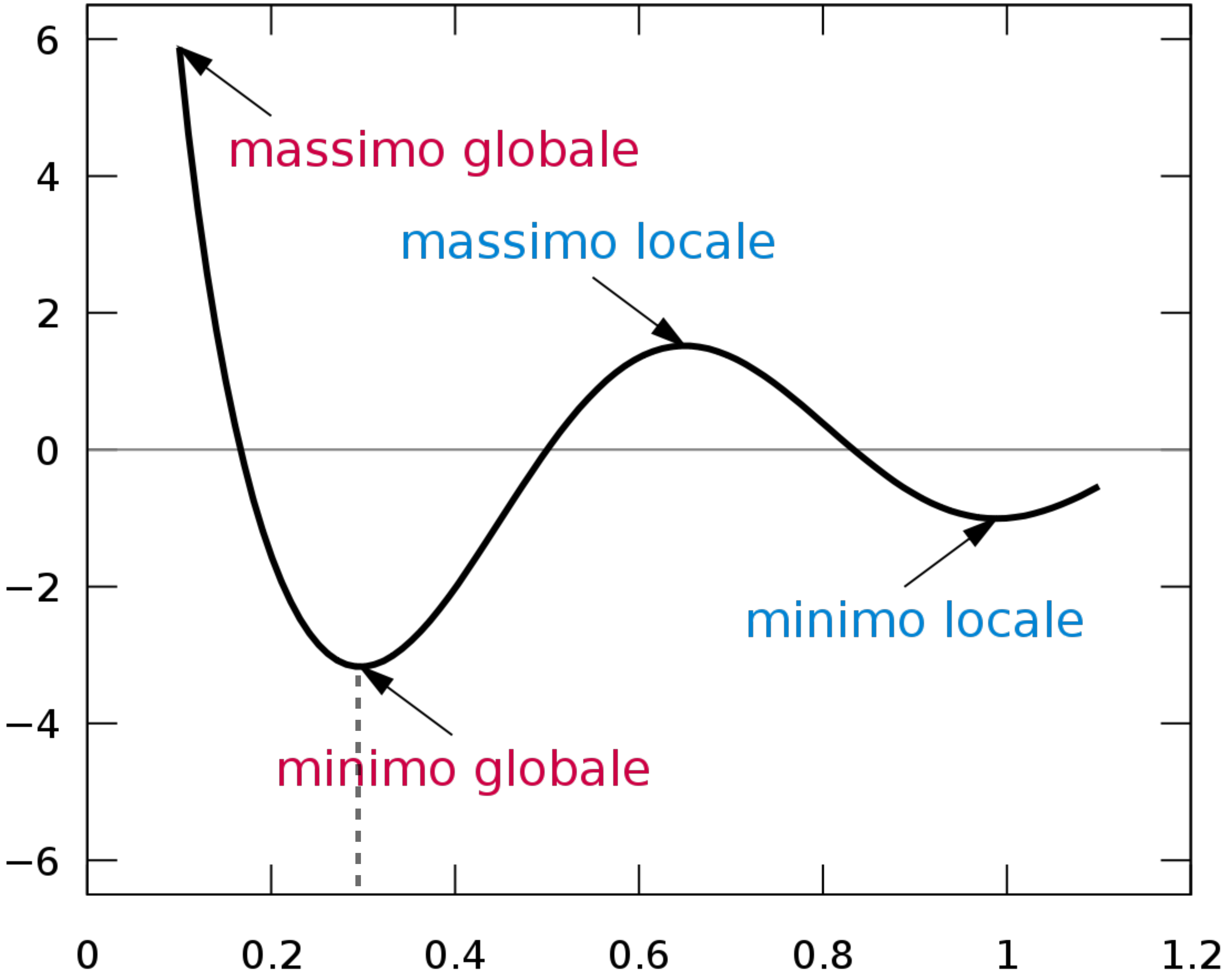
ITI ITE IP

20 Aprile 2022

Alcuni problemi di minimo/massimo

Quando l'incognita è

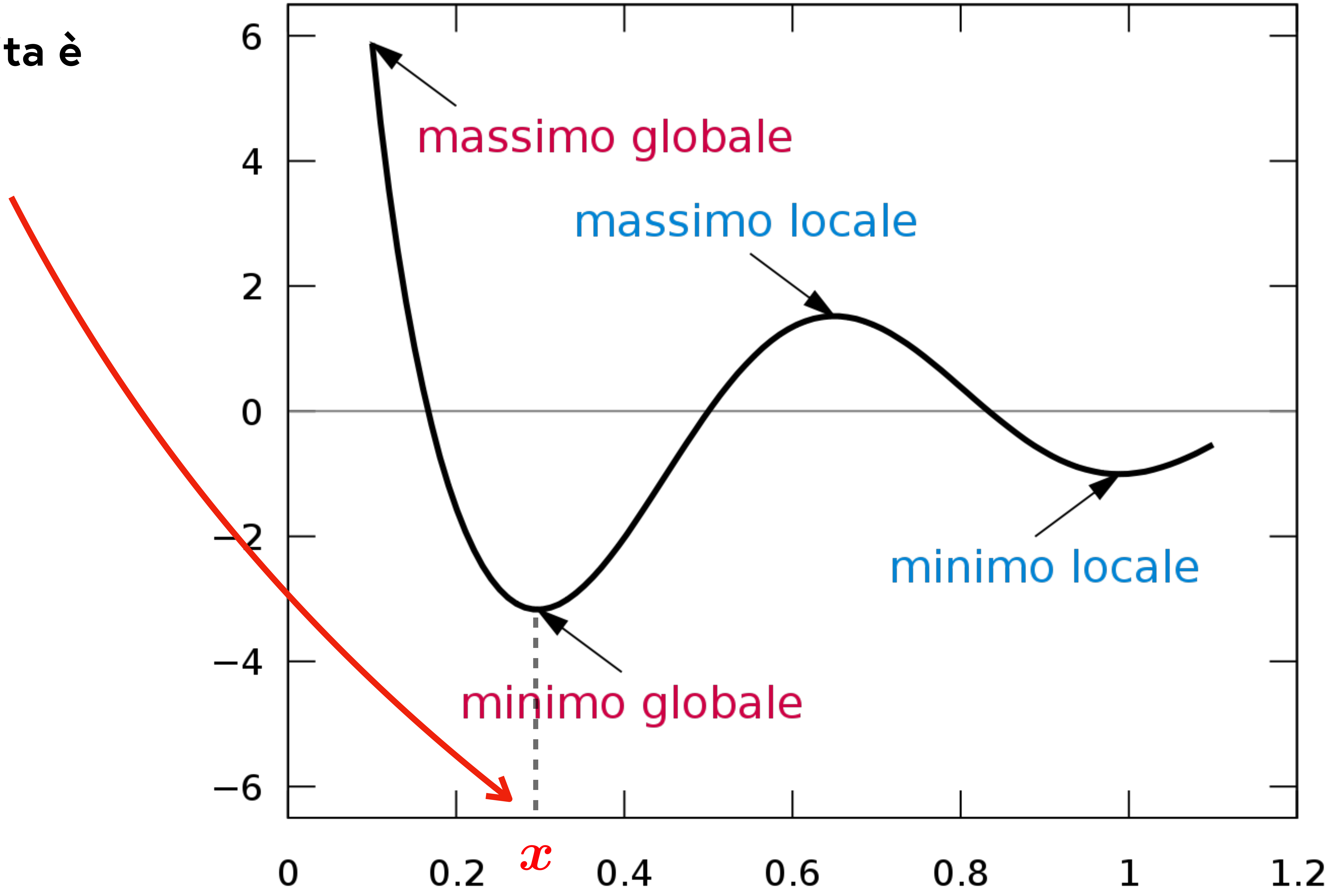
un numero reale



Alcuni problemi di minimo/massimo

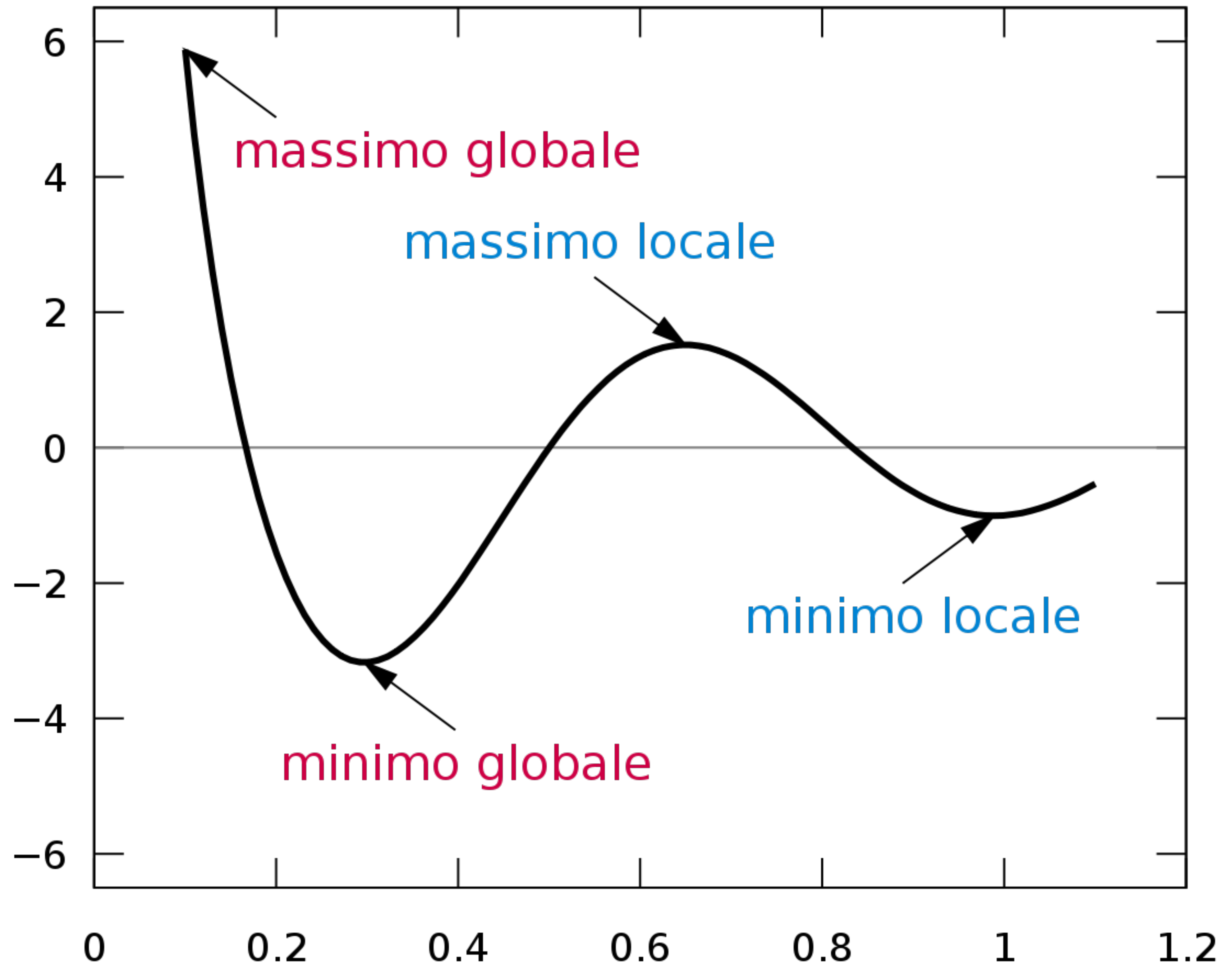
Quando l'incognita è

un numero reale



I problemi di minimo di funzioni di una variabile

- Esiste?
- Candidati?
- Trovarlo



Problemi di una variabile

La piazza rettangolare più ampia?

Tra tutte le piazze rettangolari a parità di perimetro quali (se esistono) hanno area massima?

Problemi di una variabile

La piazza rettangolare più ampia?

Tra tutte le piazze rettangolari a parità di perimetro quali (se esistono) hanno area massima?

WEB

1 Connect to www.wooclap.com/IISVALDAGNO

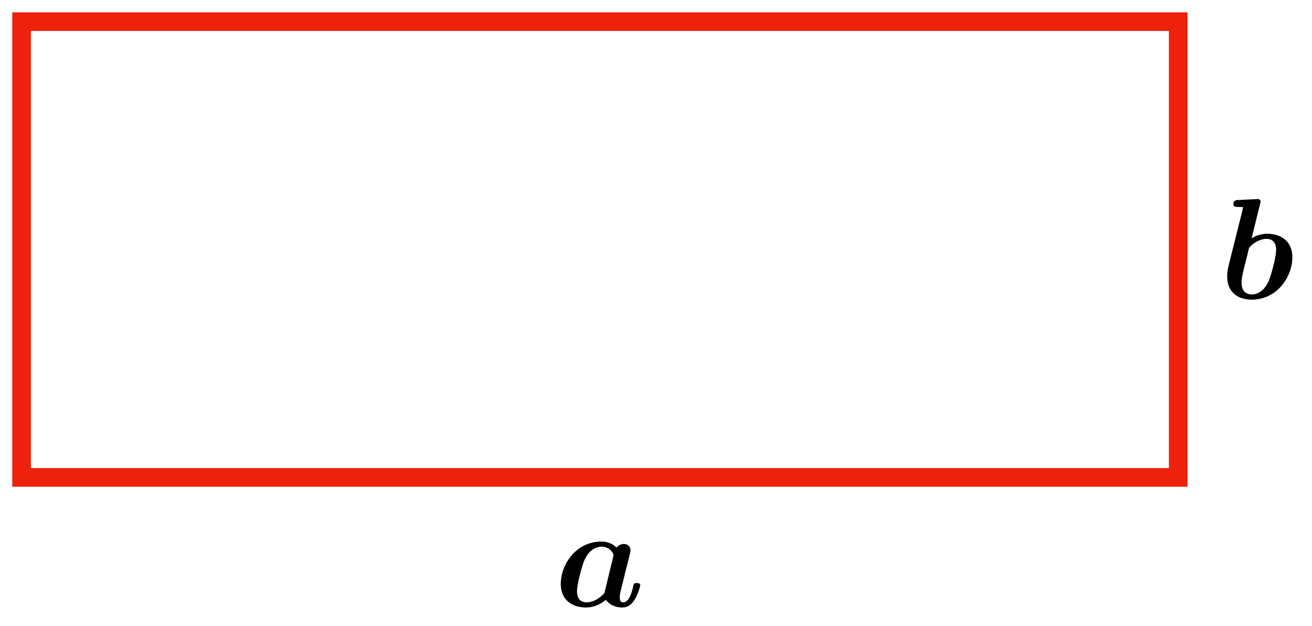
2 You can participate

RISPOSTA: il quadrato!

Dimostrazione.

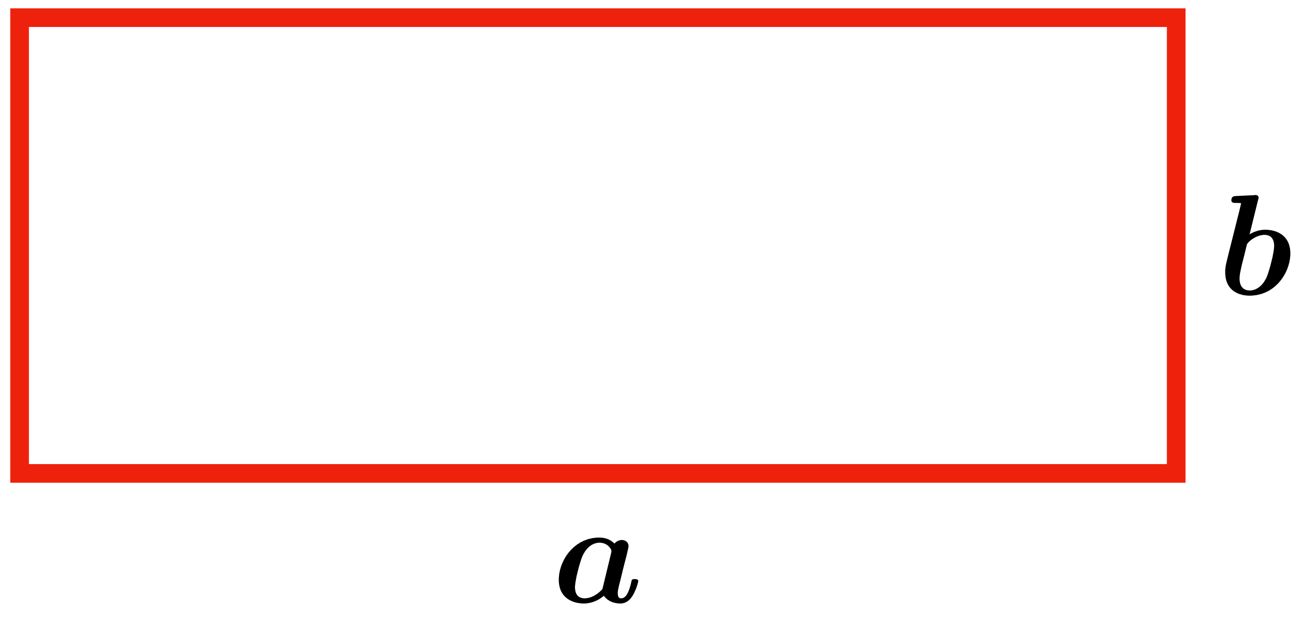
RISPOSTA: il quadrato!

Dimostrazione.



RISPOSTA: il quadrato!

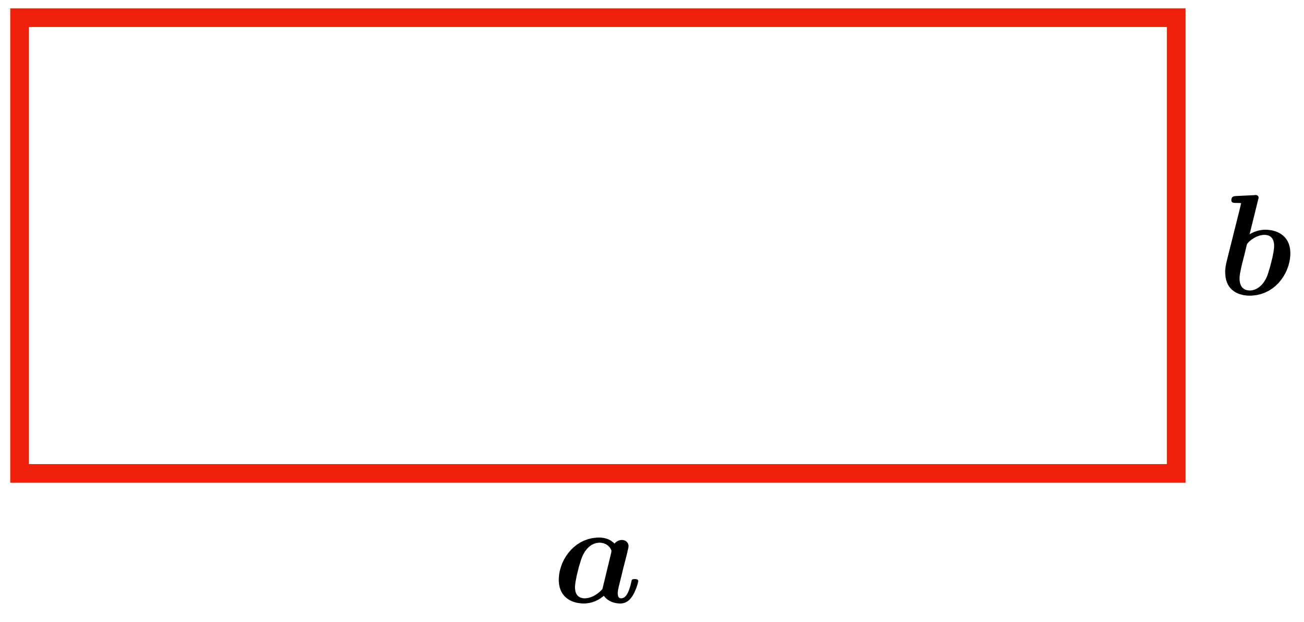
Dimostrazione.



$2a + 2b =: 2L$ (perimetro)

RISPOSTA: il quadrato!

Dimostrazione.

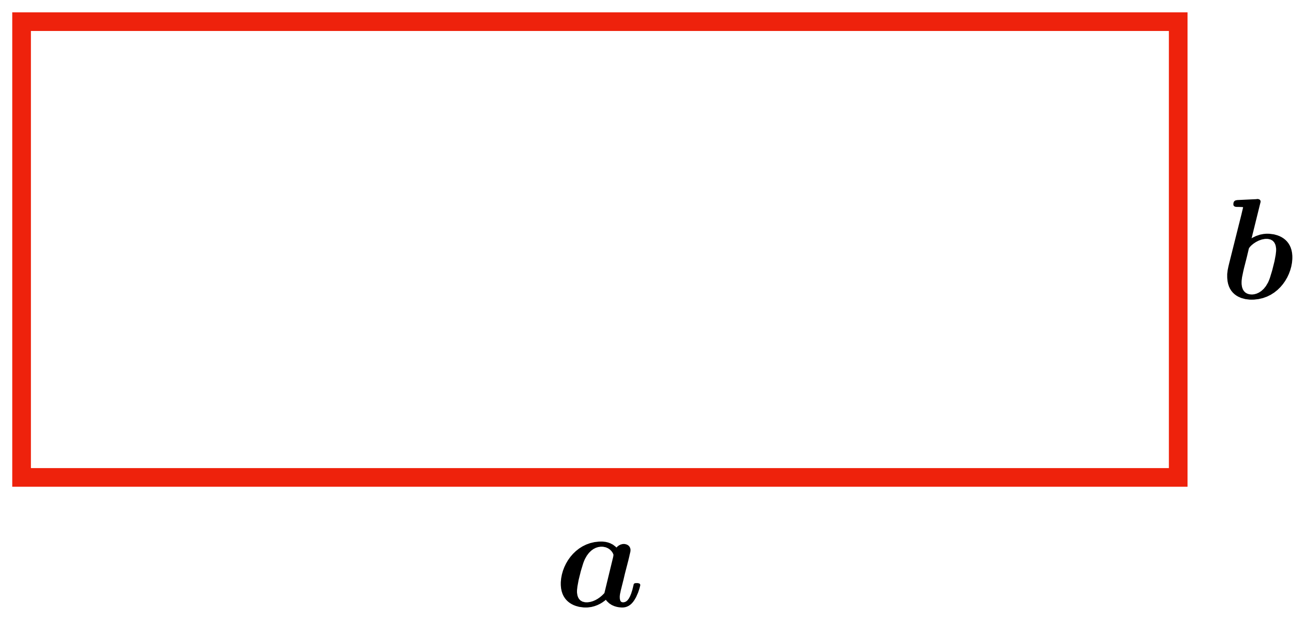


$$2a + 2b =: 2L \text{ (perimetro)}$$

$$b = L - a$$

RISPOSTA: il quadrato!

Dimostrazione.



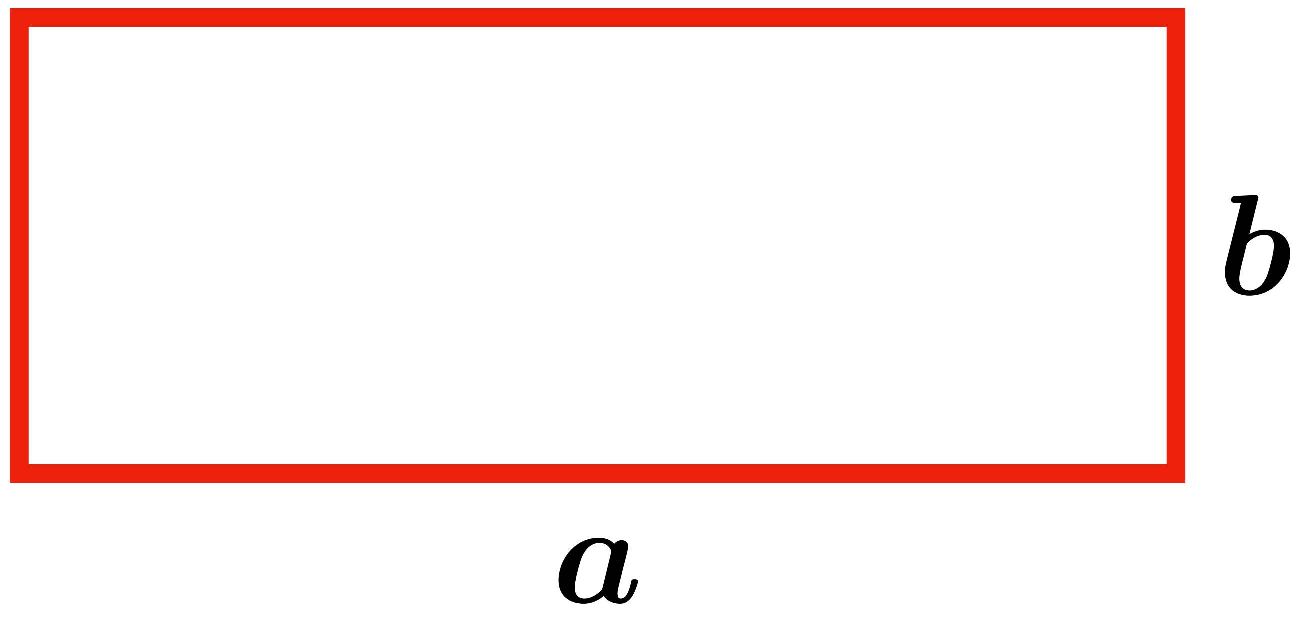
$$2a + 2b =: 2L \text{ (perimetro)}$$

$$b = L - a$$

$$\text{Area: } ab = a(L - a) := f(a)$$

RISPOSTA: il quadrato!

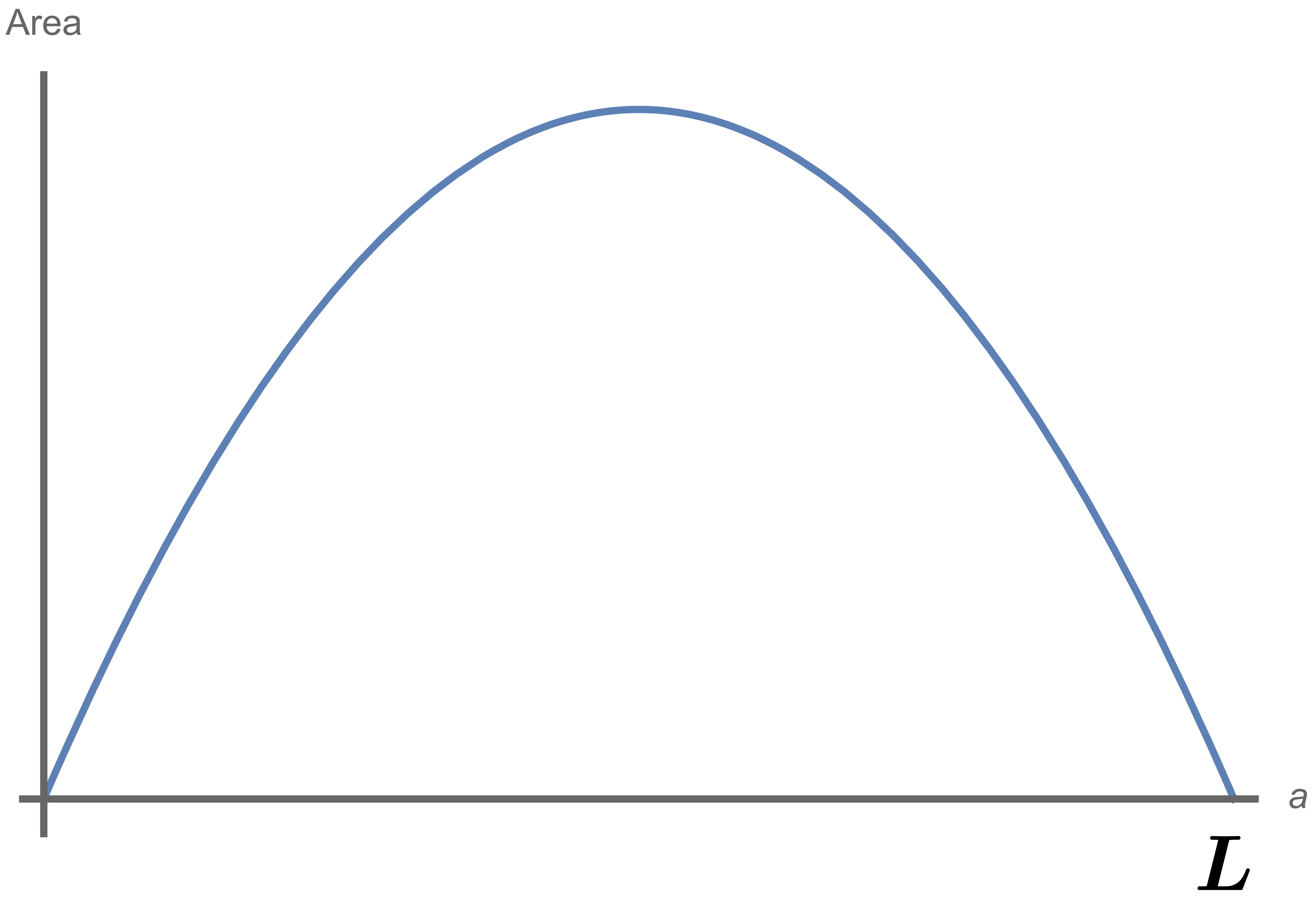
Dimostrazione.



$2a + 2b =: 2L$ **(perimetro)**

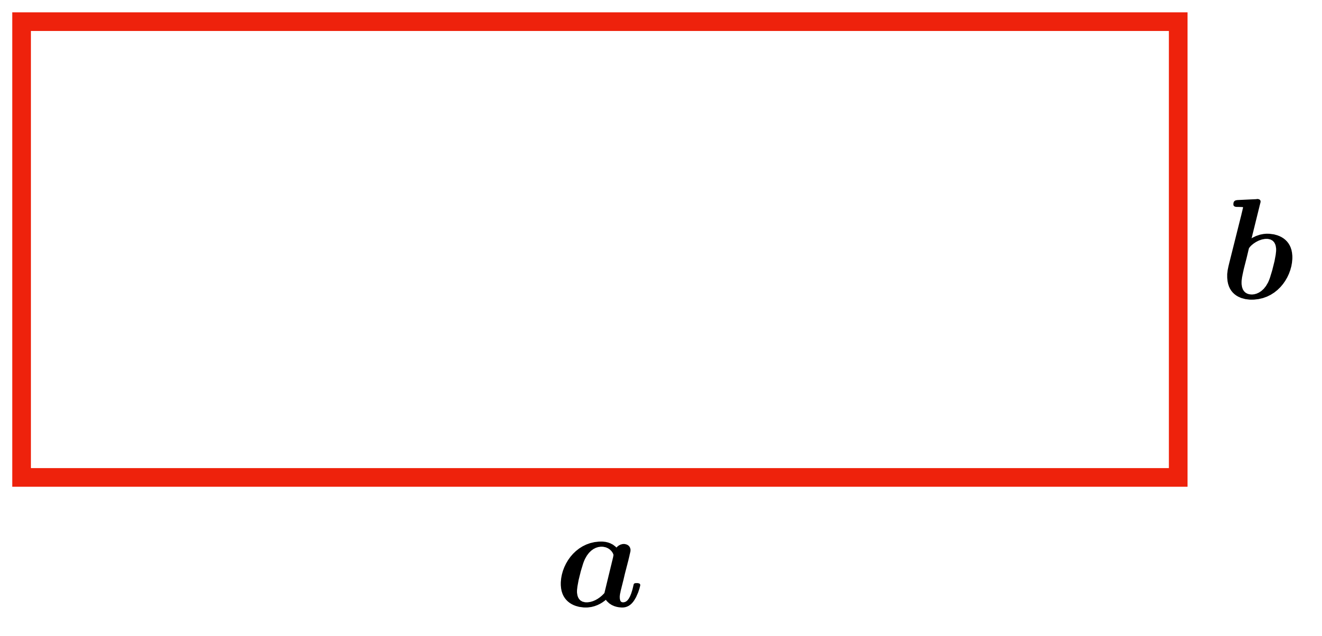
$b = L - a$

Area: $ab = a(L-a) := f(a)$



RISPOSTA: il quadrato!

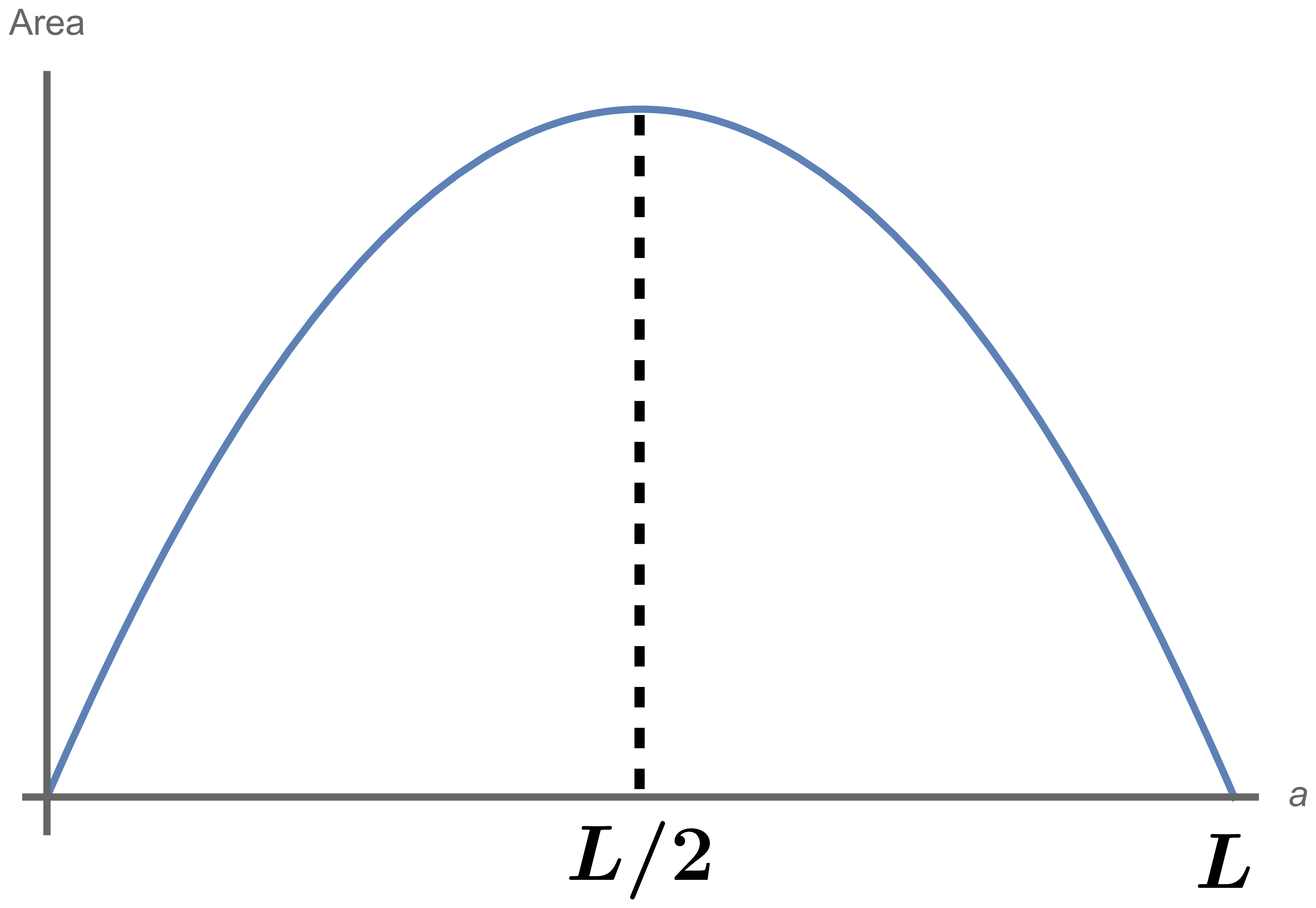
Dimostrazione.



$2a + 2b =: 2L$ (perimetro)

$b = L - a$

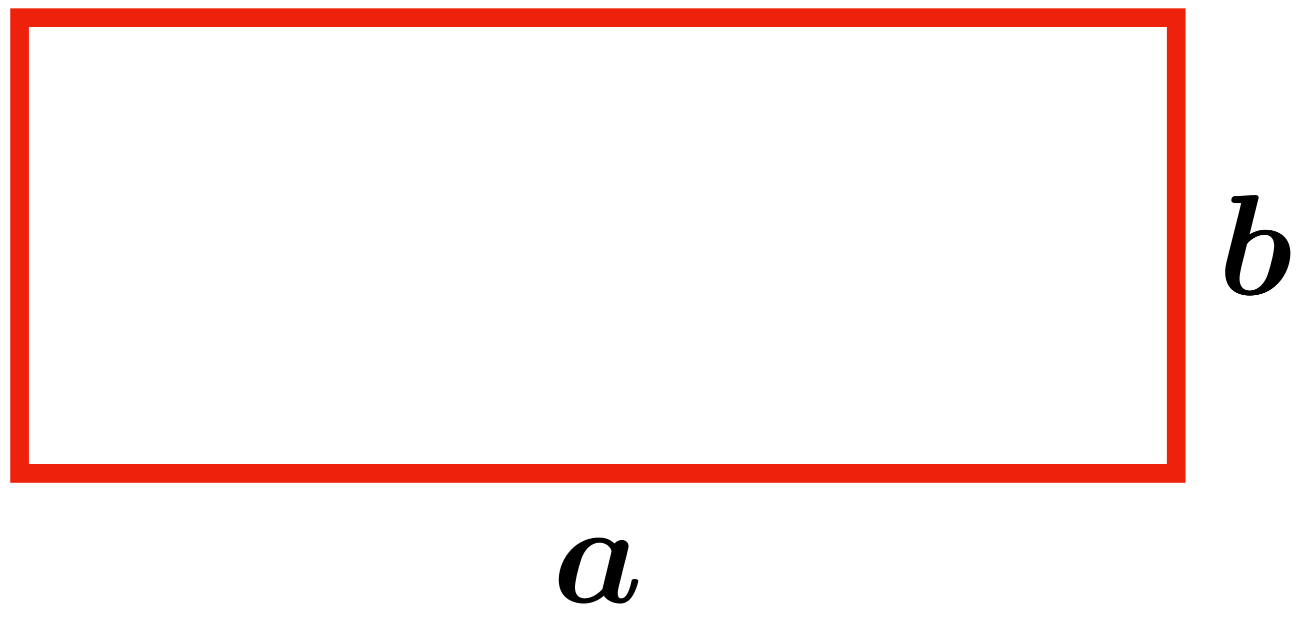
$\textbf{Area: } ab = a(L-a) := f(a)$



$f(a) \leq f(L/2)$ per ogni $a \in [0, L]$

RISPOSTA: il quadrato!

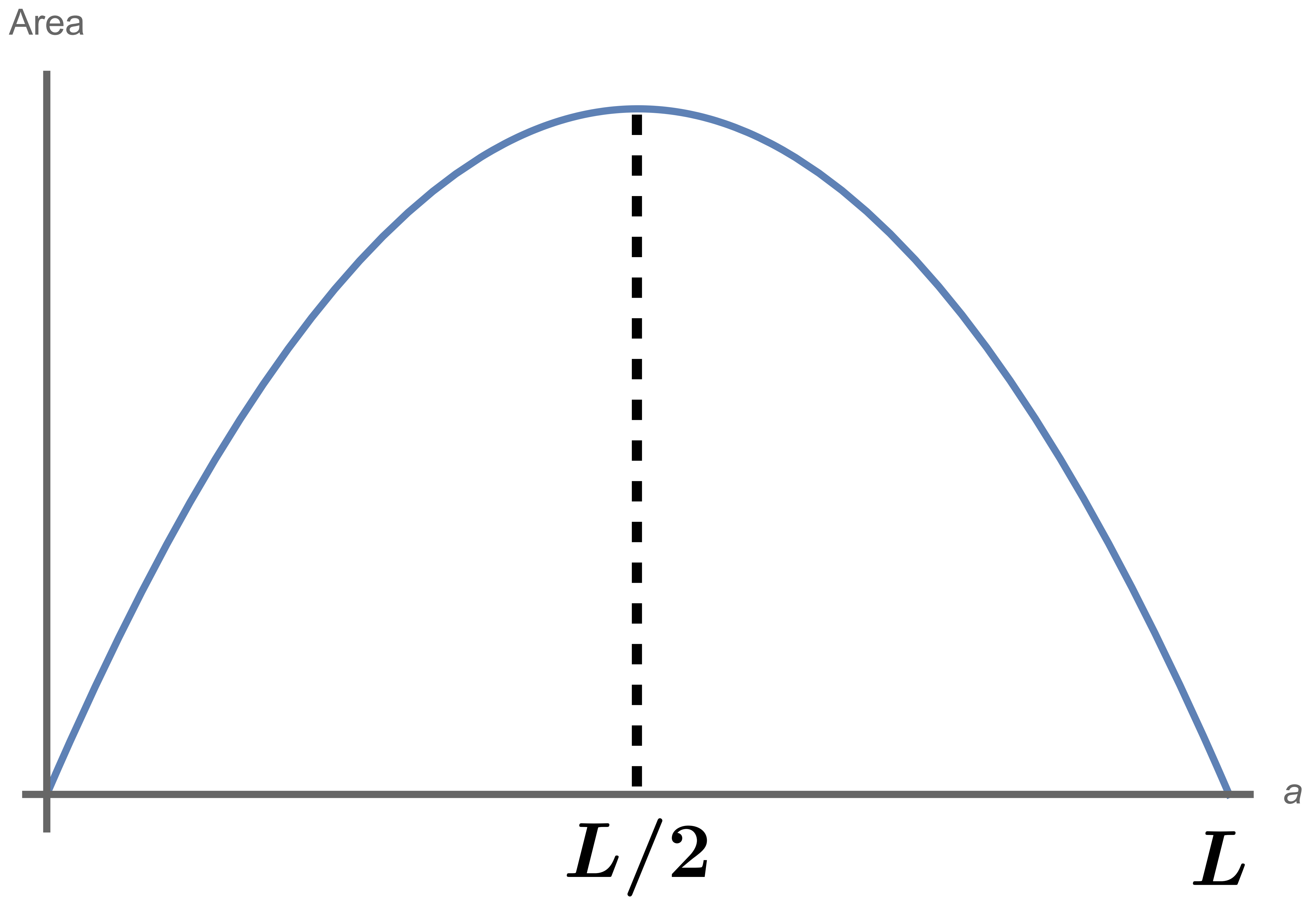
Dimostrazione.



$2a + 2b =: 2L$ (perimetro)

$b = L - a$

Area: $ab = a(L-a) := f(a)$

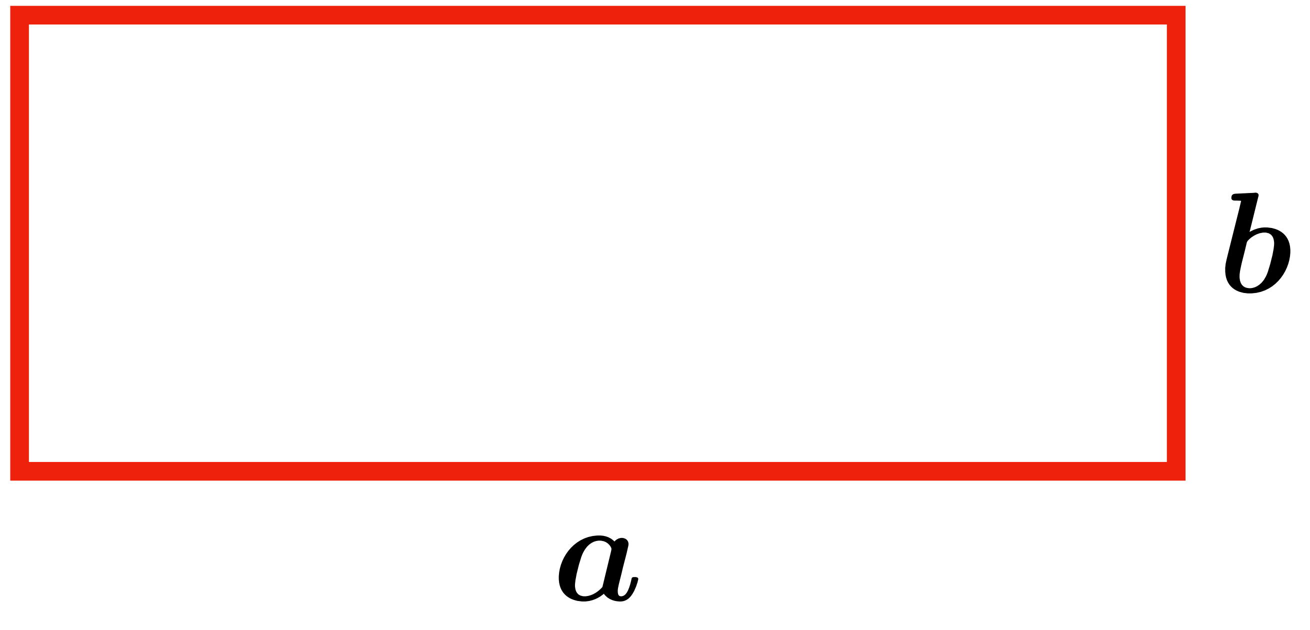


$f(a) \leq f(L/2)$ per ogni $a \in [0, L]$

Soluzione: $a = b = L/2$

RISPOSTA: il quadrato!

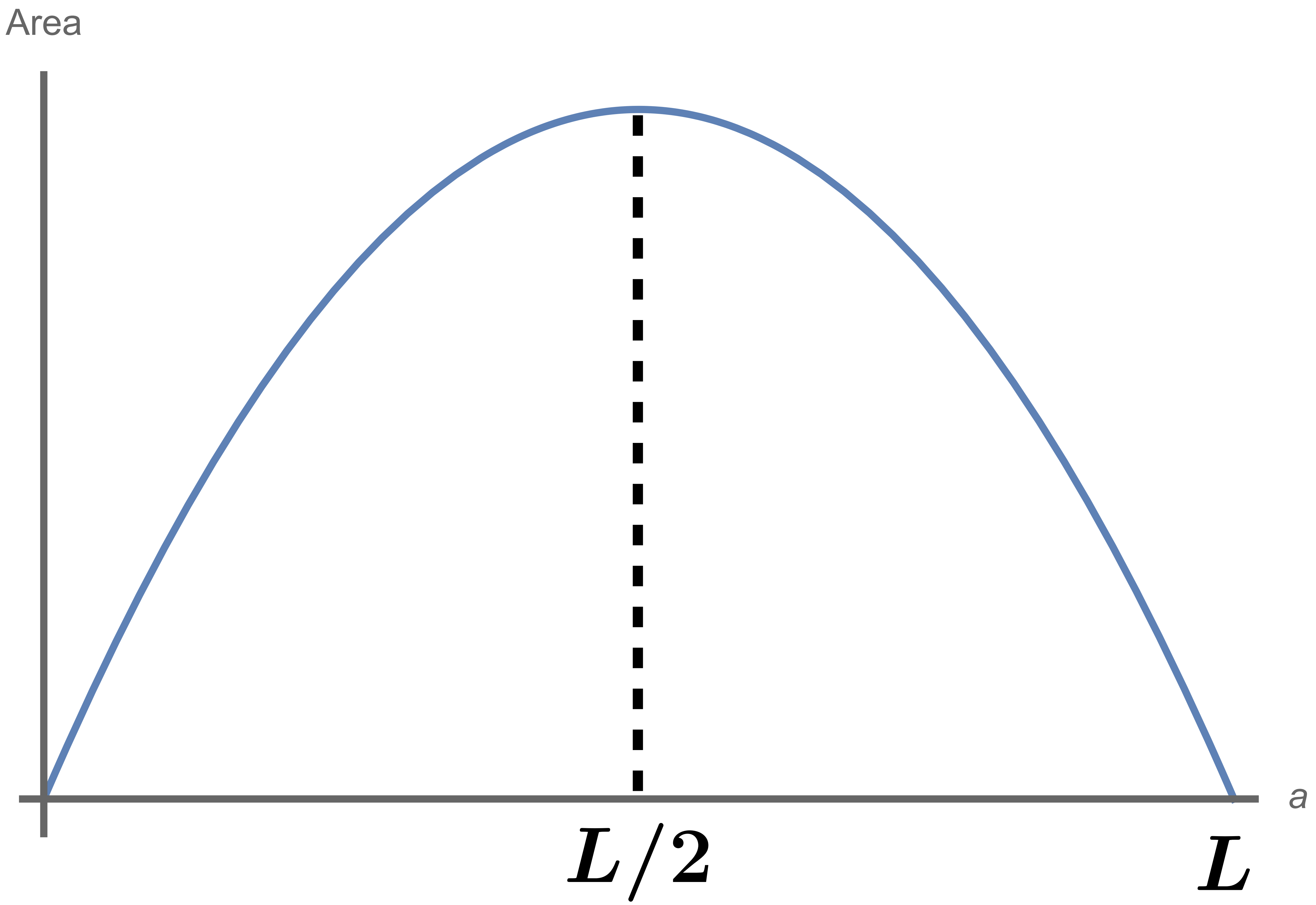
Dimostrazione.



$2a + 2b =: 2L$ (perimetro)

$b = L - a$

Area: $ab = a(L-a) := f(a)$



$f(a) \leq f(L/2)$ per ogni $a \in [0, L]$

Soluzione: $a = b = L/2$

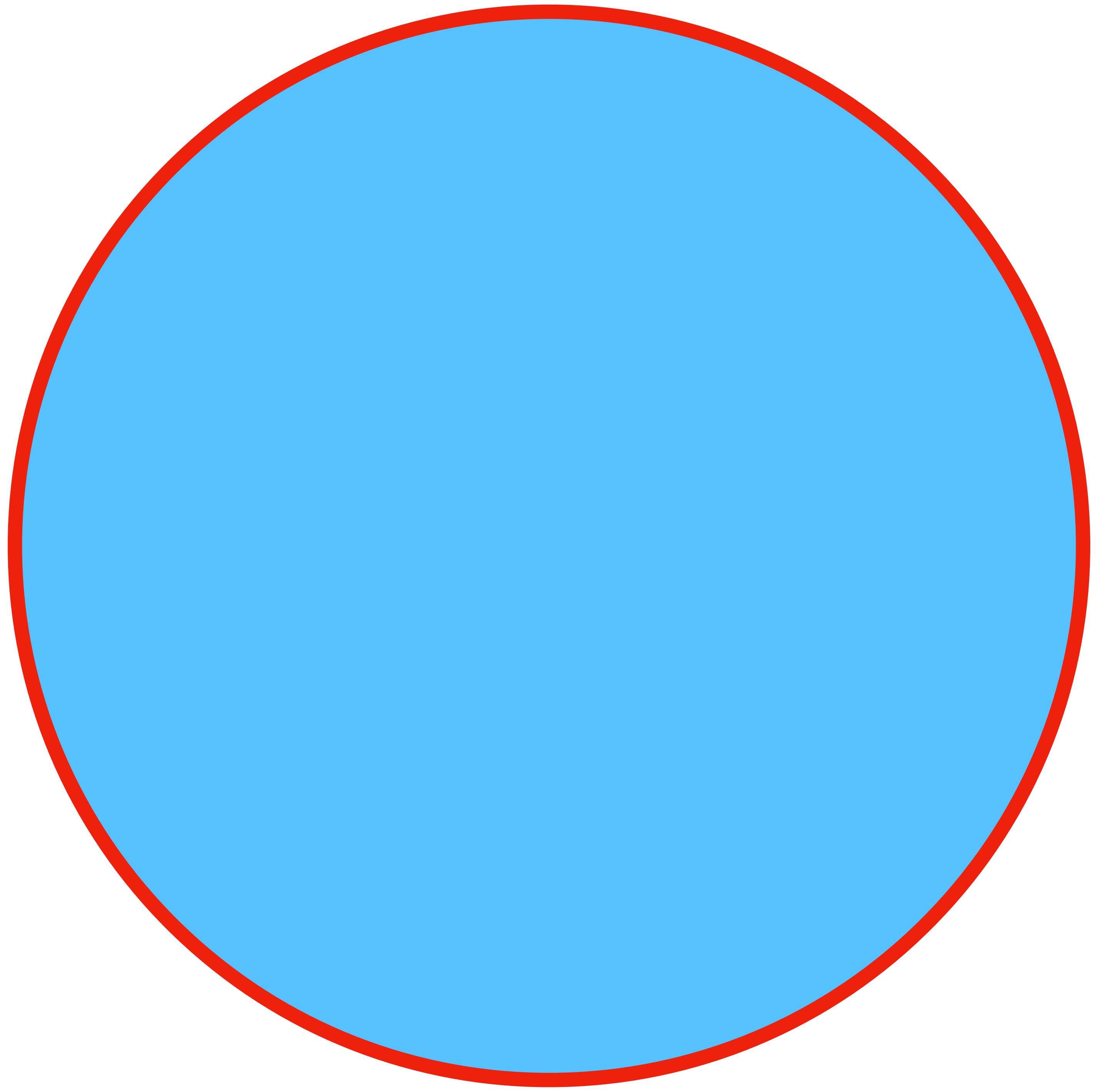
L'area massima a parità di perimetro $2L$ è $(L/2)^2 = L^2/4$.

La piazza con area più ampia?

A parità di perimetro $2L$ ci sono piazze con area maggiore di $L^2/4$?

La piazza con area più ampia?

A parità di perimetro $2L$ ci sono piazze con area maggiore di $L^2/4$?



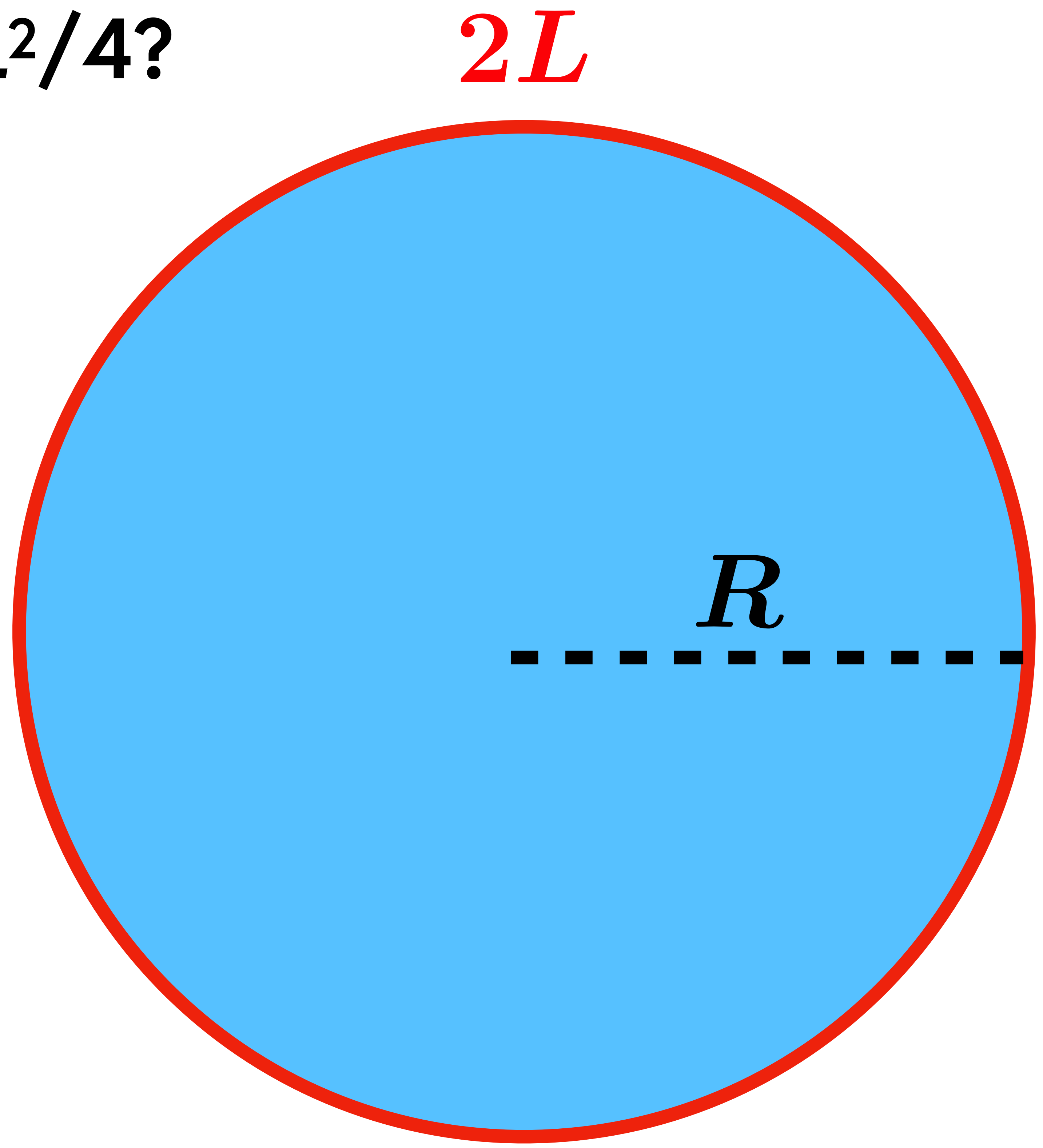
ESEMPIO Qual è l'area di un disco di perimetro $2L$?

La piazza con area più ampia?

A parità di perimetro $2L$ ci sono piazze con area maggiore di $L^2/4$?

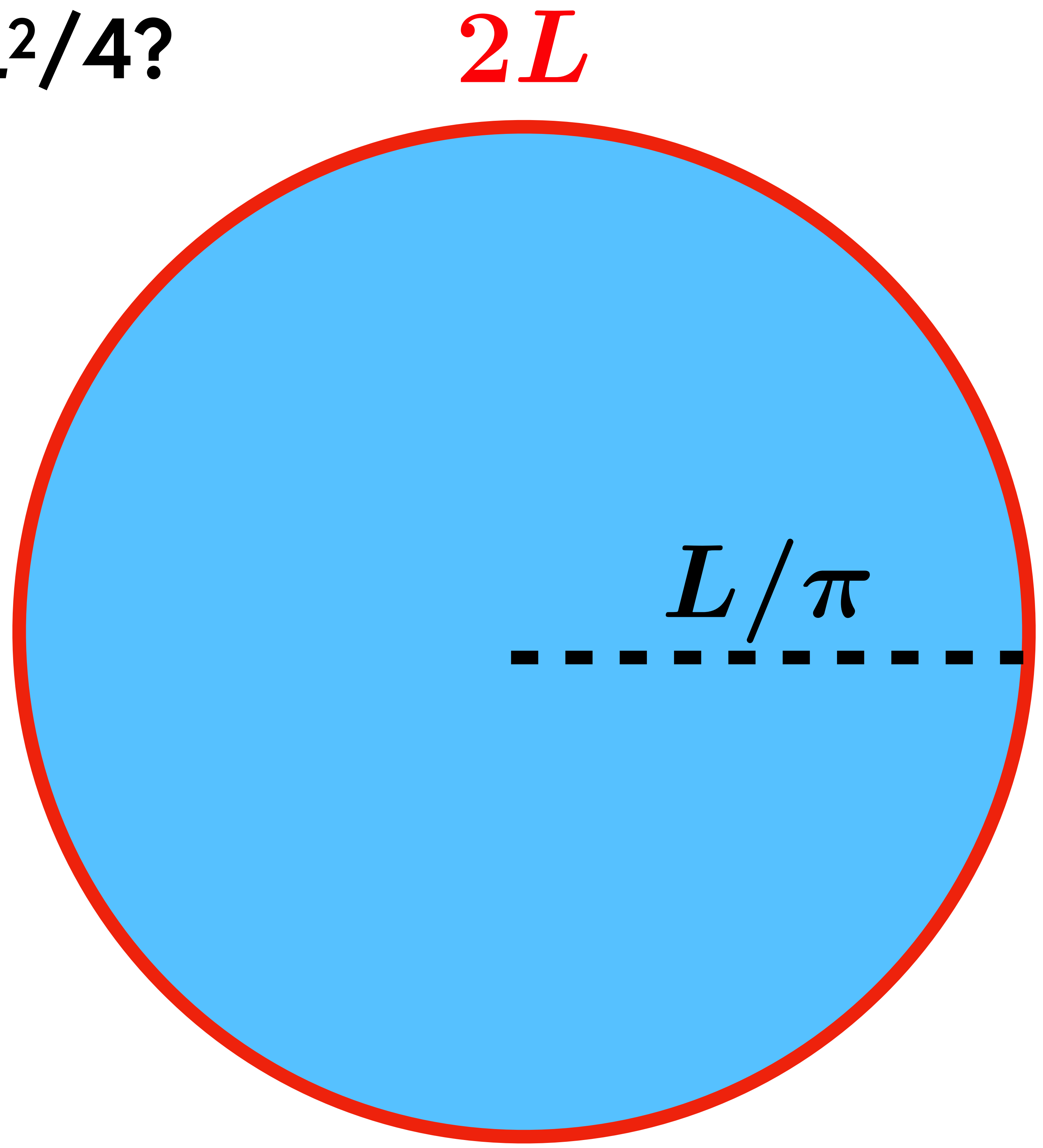
ESEMPIO Qual è l'area di un disco di perimetro $2L$?

$$2\pi R = 2L$$



La piazza con area più ampia?

A parità di perimetro $2L$ ci sono piazze con area maggiore di $L^2/4$?

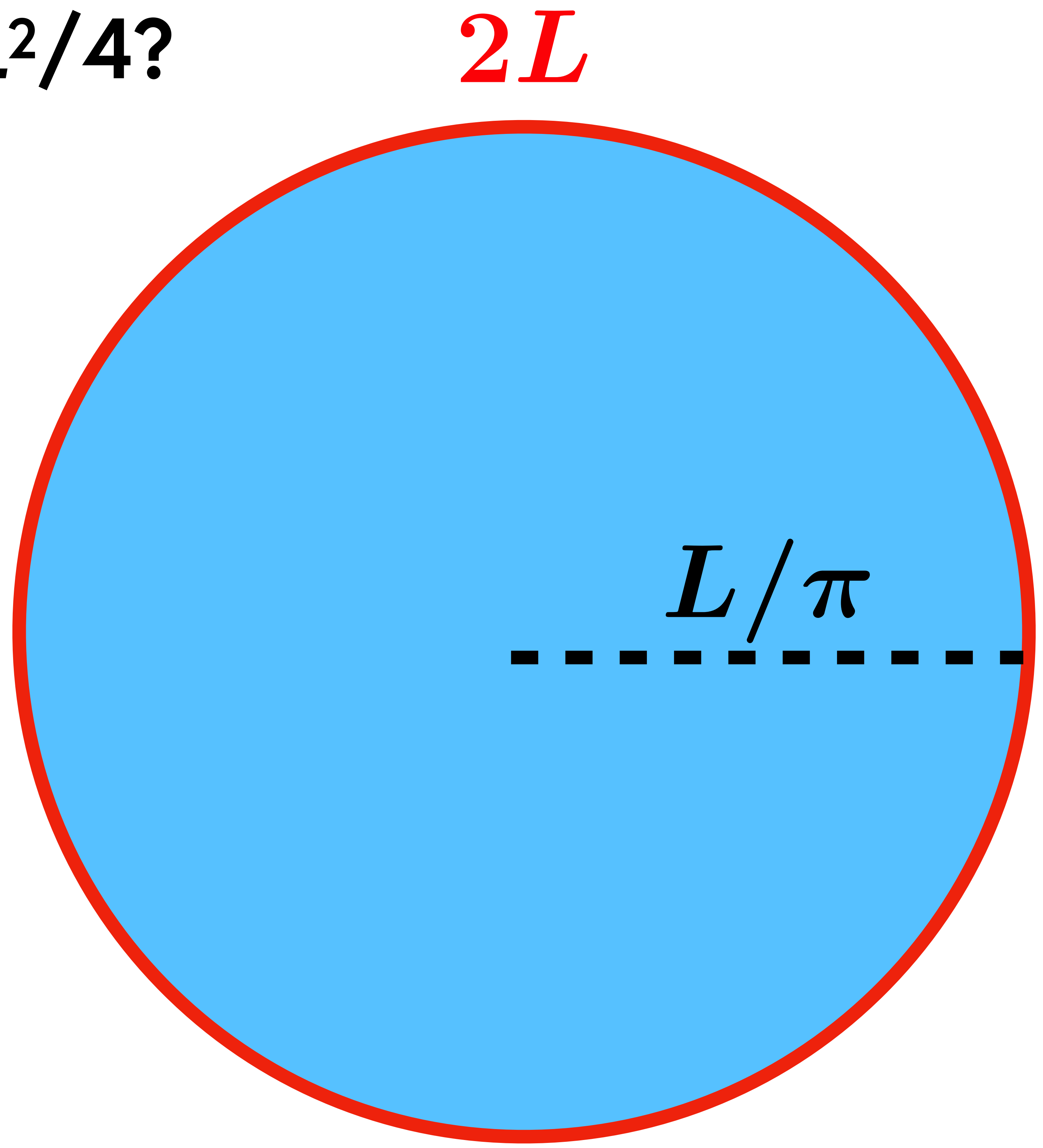


ESEMPIO Qual è l'area di un disco di perimetro $2L$?

$$2\pi R = 2L \qquad R = \frac{L}{\pi}$$

La piazza con area più ampia?

A parità di perimetro $2L$ ci sono piazze con area maggiore di $L^2/4$?



ESEMPIO Qual è l'area di un disco di perimetro $2L$?

$$2\pi R = 2L \qquad R = \frac{L}{\pi}$$

$$\text{Area: } \pi R^2 = \pi \left(\frac{L}{\pi}\right)^2$$

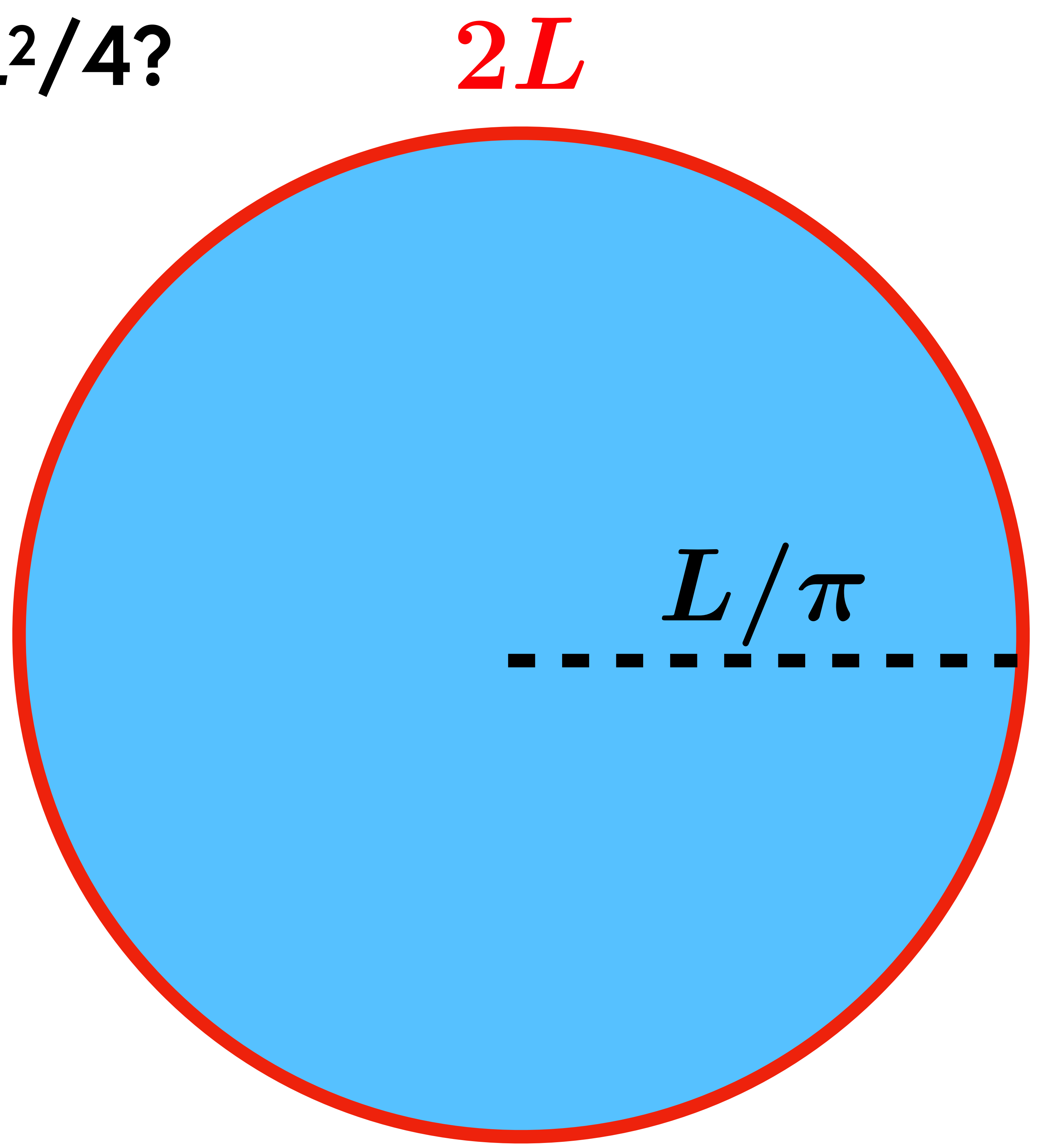
La piazza con area più ampia?

A parità di perimetro $2L$ ci sono piazze con area maggiore di $L^2/4$?

ESEMPIO Qual è l'area di un disco di perimetro $2L$?

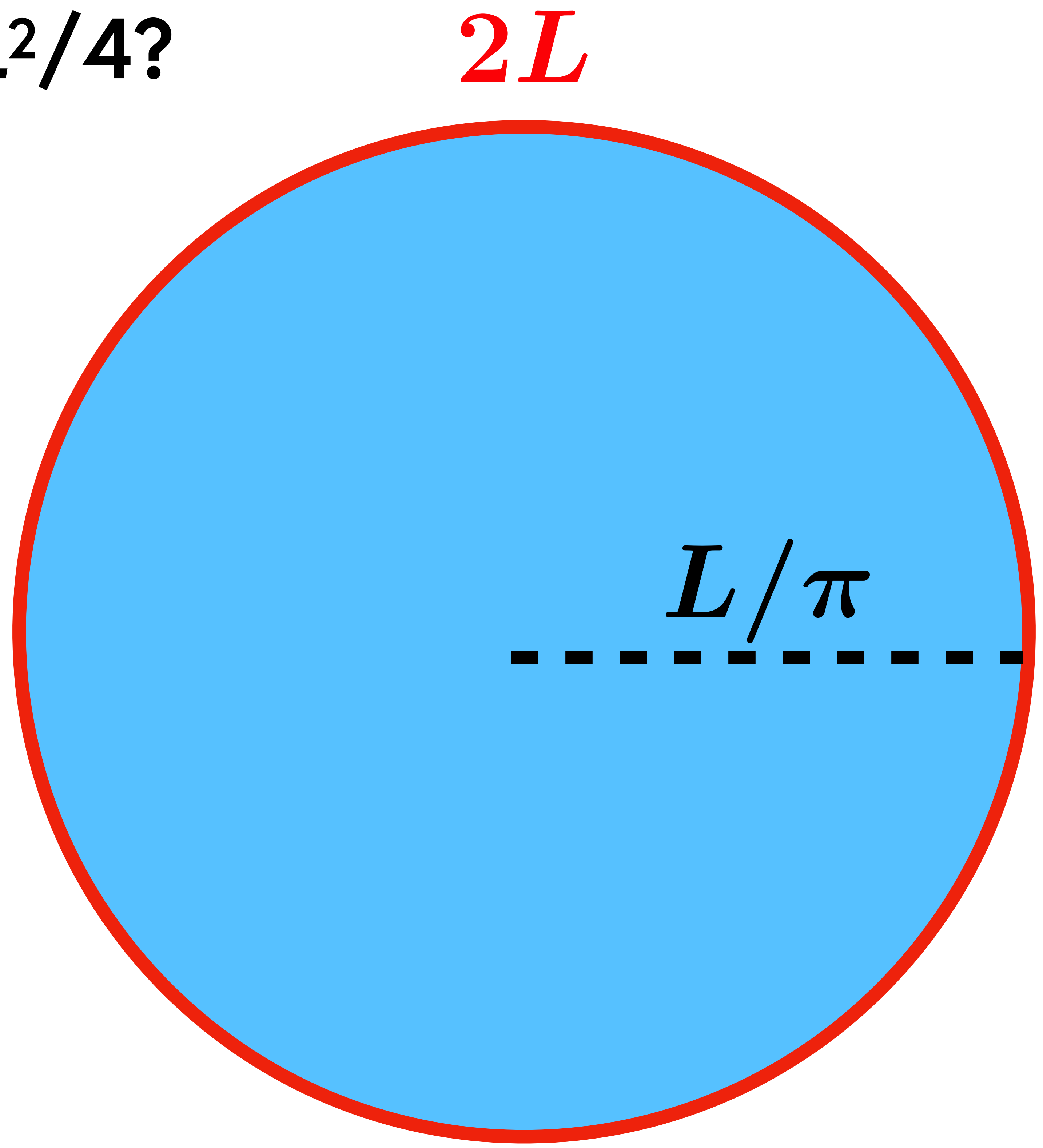
$$2\pi R = 2L \qquad R = \frac{L}{\pi}$$

$$\text{Area: } \pi R^2 = \pi \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{\pi}$$



La piazza con area più ampia?

A parità di perimetro $2L$ ci sono piazze con area maggiore di $L^2/4$?



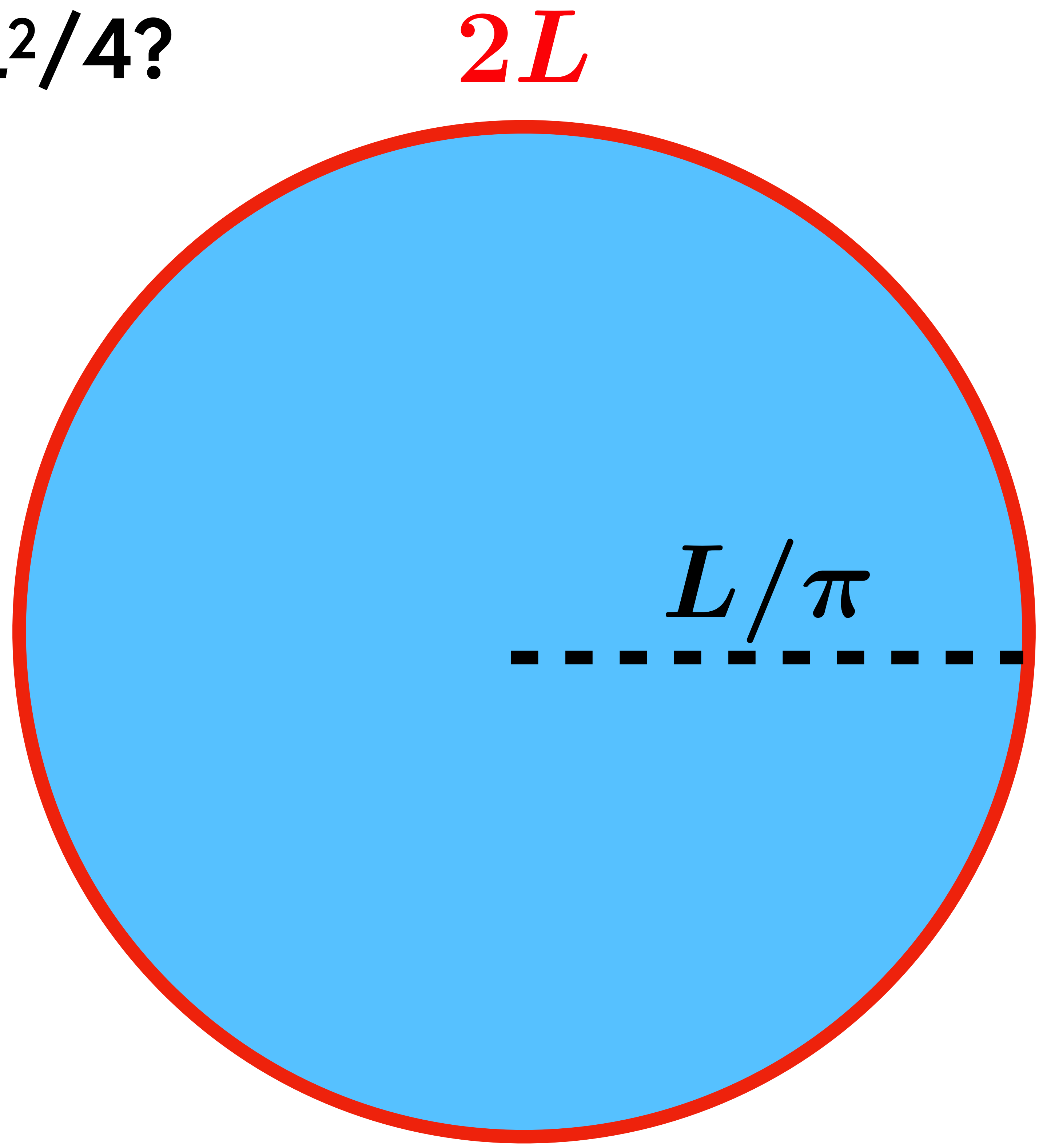
ESEMPIO Qual è l'area di un disco di perimetro $2L$?

$$2\pi R = 2L \qquad R = \frac{L}{\pi}$$

$$\text{Area: } \pi R^2 = \pi\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{\pi} > \frac{L^2}{4}$$

La piazza con area più ampia?

A parità di perimetro $2L$ ci sono piazze con area maggiore di $L^2/4$?



ESEMPIO Qual è l'area di un disco di perimetro $2L$?

$$2\pi R = 2L \qquad R = \frac{L}{\pi}$$

$$\text{Area: } \pi R^2 = \pi \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{\pi} > \frac{L^2}{4}$$

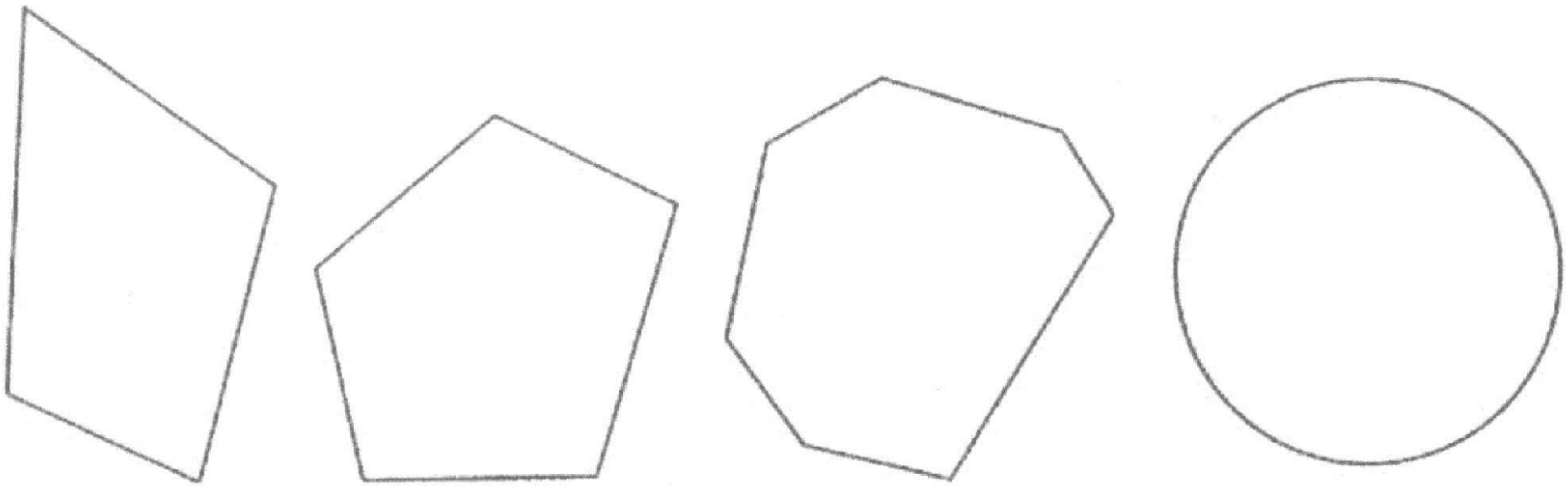
Ci sono domini con area maggiore, a parità di perimetro?

L’incognita NON è una variabile

Il problema (isoperimetrico) di Didone

Approdata sulle coste libiche, Didone ottenne dal re Iarba il permesso di stabilirsi lì, prendendo tanto terreno «quanto ne poteva contenere una pelle di bue»

Tra tutte le curve chiuse di data lunghezza determinare quelle che racchiudono una regione di area massima



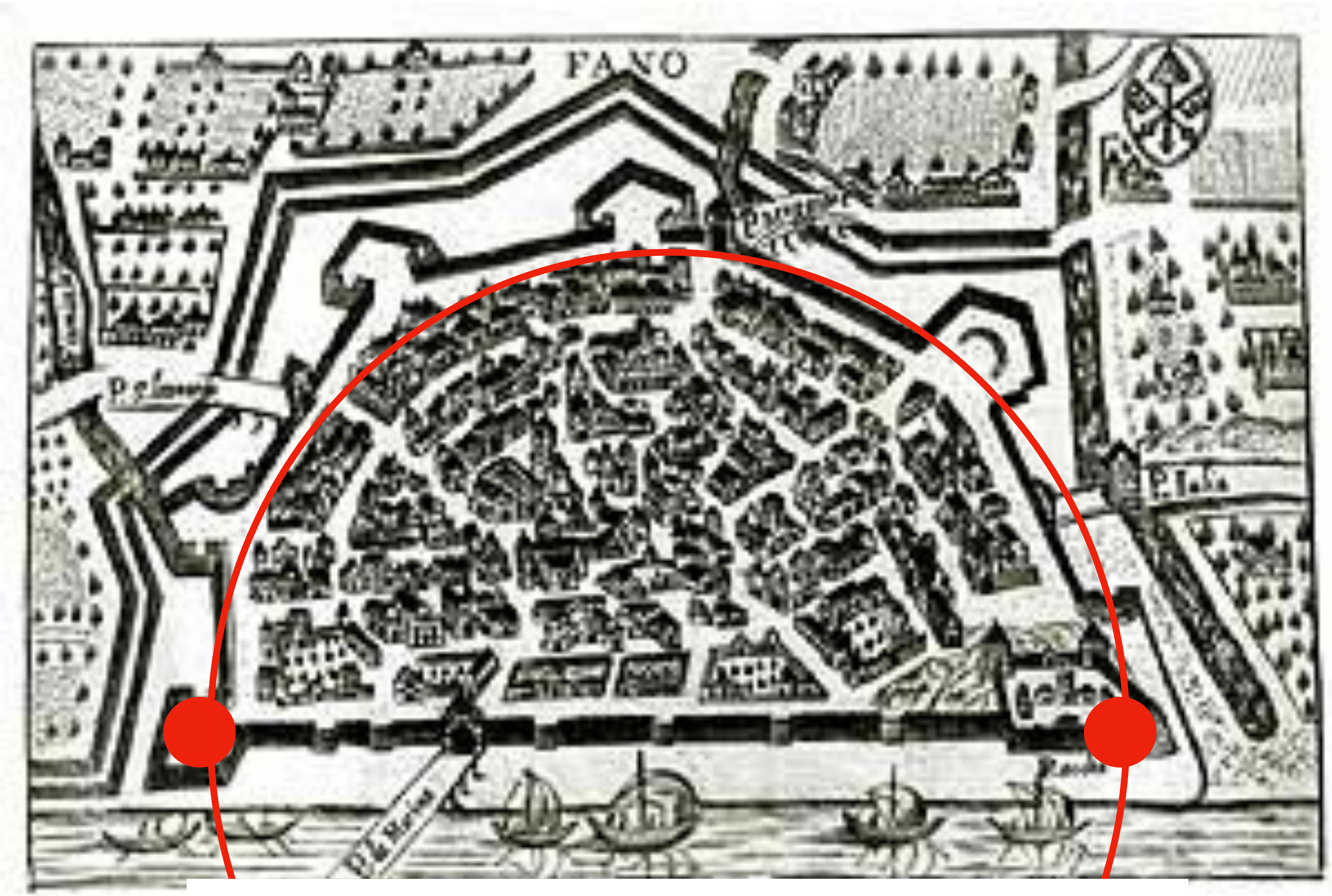
Il problema (isoperimetrico) di Didone

Soluzione: il cerchio

Da centinaia di anni era noto che SE la soluzione esiste allora si tratta di un cerchio

Per provare l'esistenza è servita la matematica del '900

Il problema di Didone con due estremi fissi



Esistono soluzioni?

La NON esistenza: un errore frequente anche di grandi matematici

Esistono soluzioni?

La NON esistenza: un errore frequente anche di grandi matematici

ESEMPIO. Supponiamo esista il massimo dei naturali. Allora il massimo è uguale a 1!

Esistono soluzioni?

La NON esistenza: un errore frequente anche di grandi matematici

ESEMPIO. Supponiamo esista il massimo dei naturali. Allora il massimo è uguale a 1!

Dimostrazione. Supponiamo $n = \max \mathbb{N}$.

Esistono soluzioni?

La NON esistenza: un errore frequente anche di grandi matematici

ESEMPIO. Supponiamo esista il massimo dei naturali. Allora il massimo è uguale a 1!

Dimostrazione. Supponiamo $n = \max \mathbb{N}$.

Se $n > 1$ allora $n^2 > n$, quindi n non è il massimo.

Esistono soluzioni?

La NON esistenza: un errore frequente anche di grandi matematici

ESEMPIO. Supponiamo esista il massimo dei naturali. Allora il massimo è uguale a 1!

Dimostrazione. Supponiamo $n = \max \mathbb{N}$.

Se $n > 1$ allora $n^2 > n$, quindi n non è il massimo.

Pertanto $n = 1$. $\square$

Il problema di Kakeya

Un insieme del piano si dice di Kakeya se in esso è possibile ruotare un segmento di lunghezza unitaria di 180 gradi facendolo ritornare alla posizione iniziale.

Il problema di Kakeya

Un insieme del piano si dice di Kakeya se in esso è possibile ruotare un segmento di lunghezza unitaria di 180 gradi facendolo ritornare alla posizione iniziale.

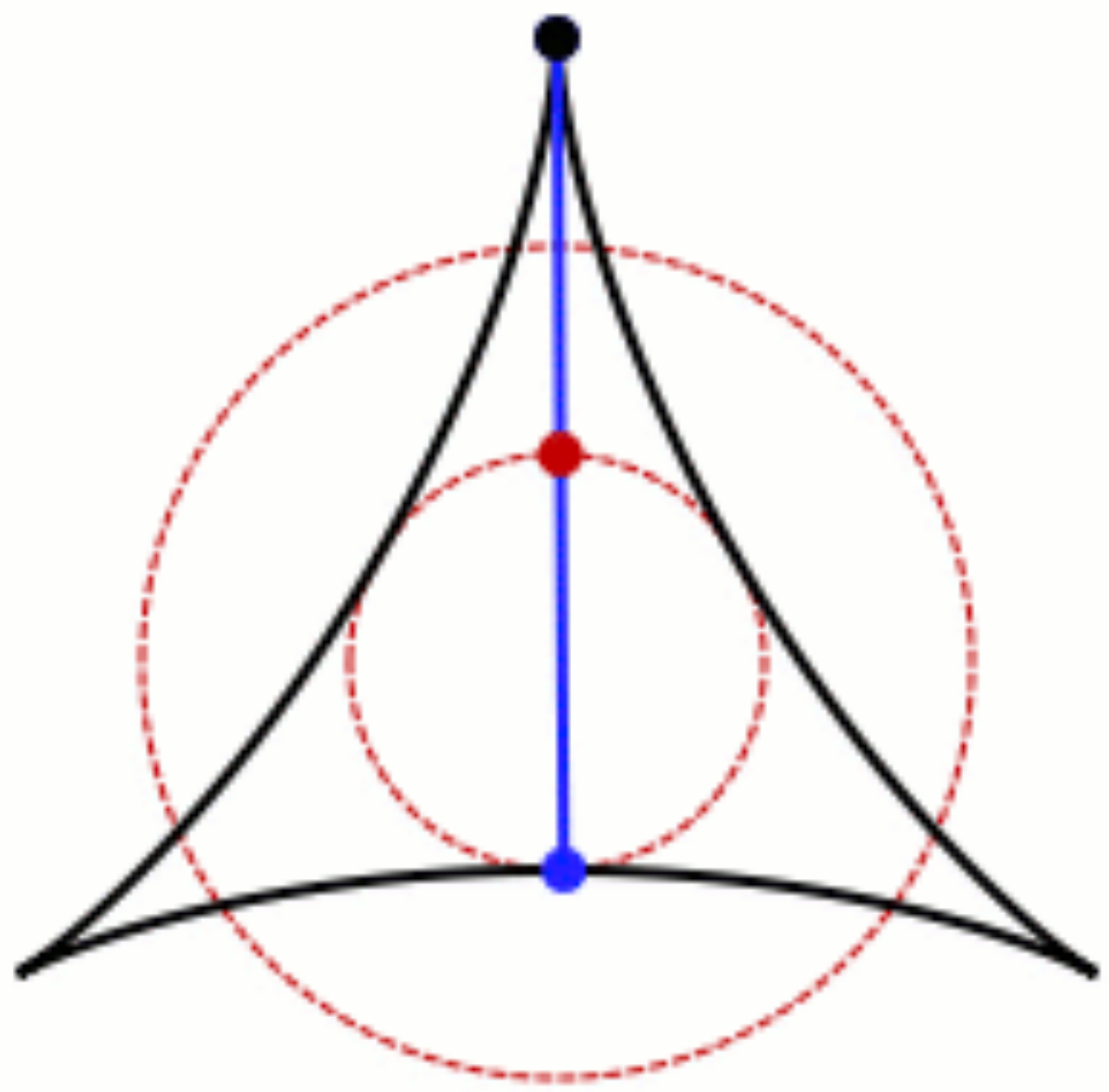
Esempio. Un disco di raggio 1/2

Il problema di Kakeya

Un insieme del piano si dice di Kakeya se in esso è possibile ruotare un segmento di lunghezza unitaria di 180 gradi facendolo ritornare alla posizione iniziale.

Esempio. Un disco di raggio 1/2

Esempio. Un deltoide

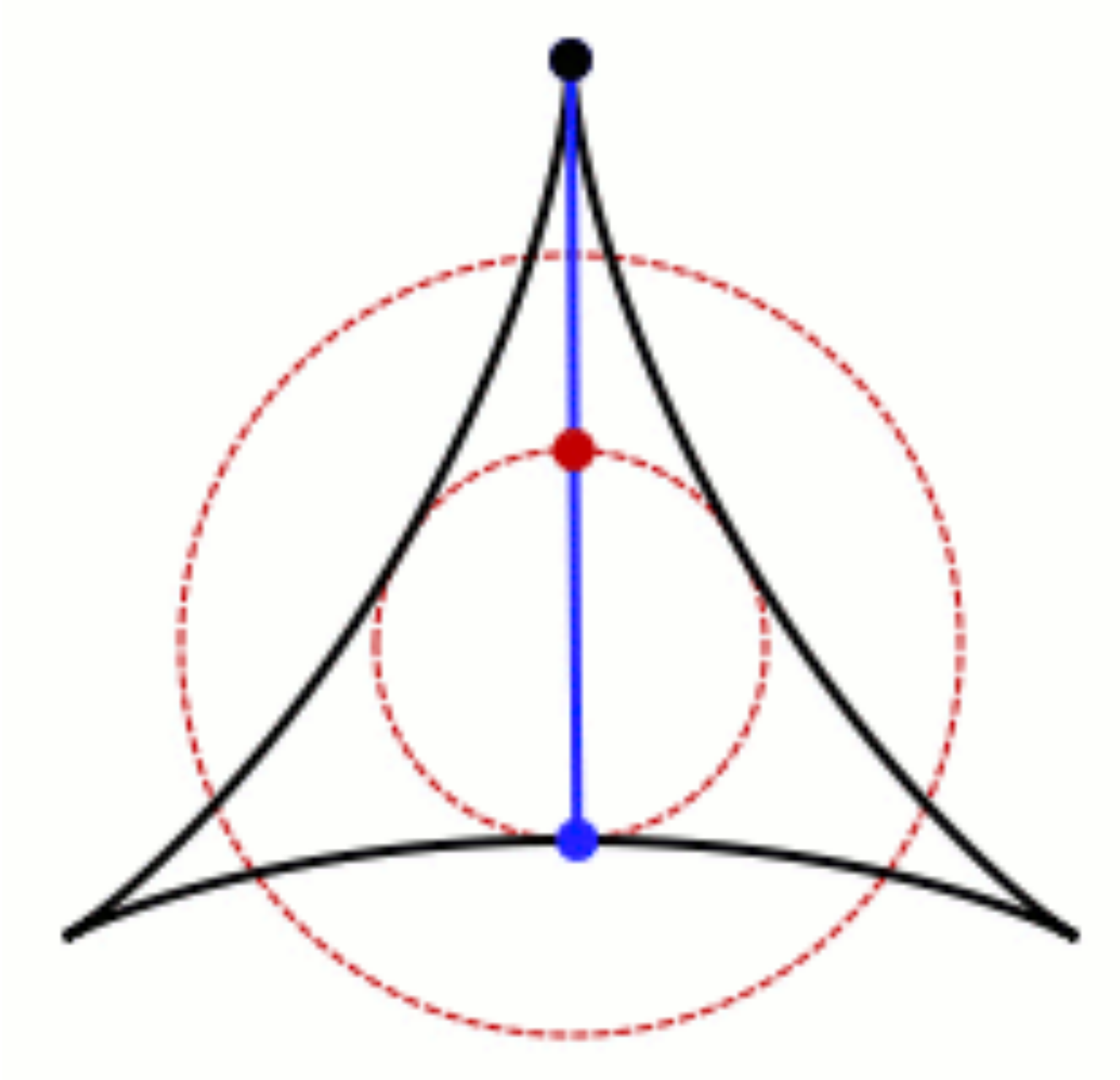


Il problema di Kakeya

Un insieme del piano si dice di Kakeya se in esso è possibile ruotare un segmento di lunghezza unitaria di 180 gradi facendolo ritornare alla posizione iniziale.

Esempio. Un disco di raggio 1/2

Esempio. Un deltoide



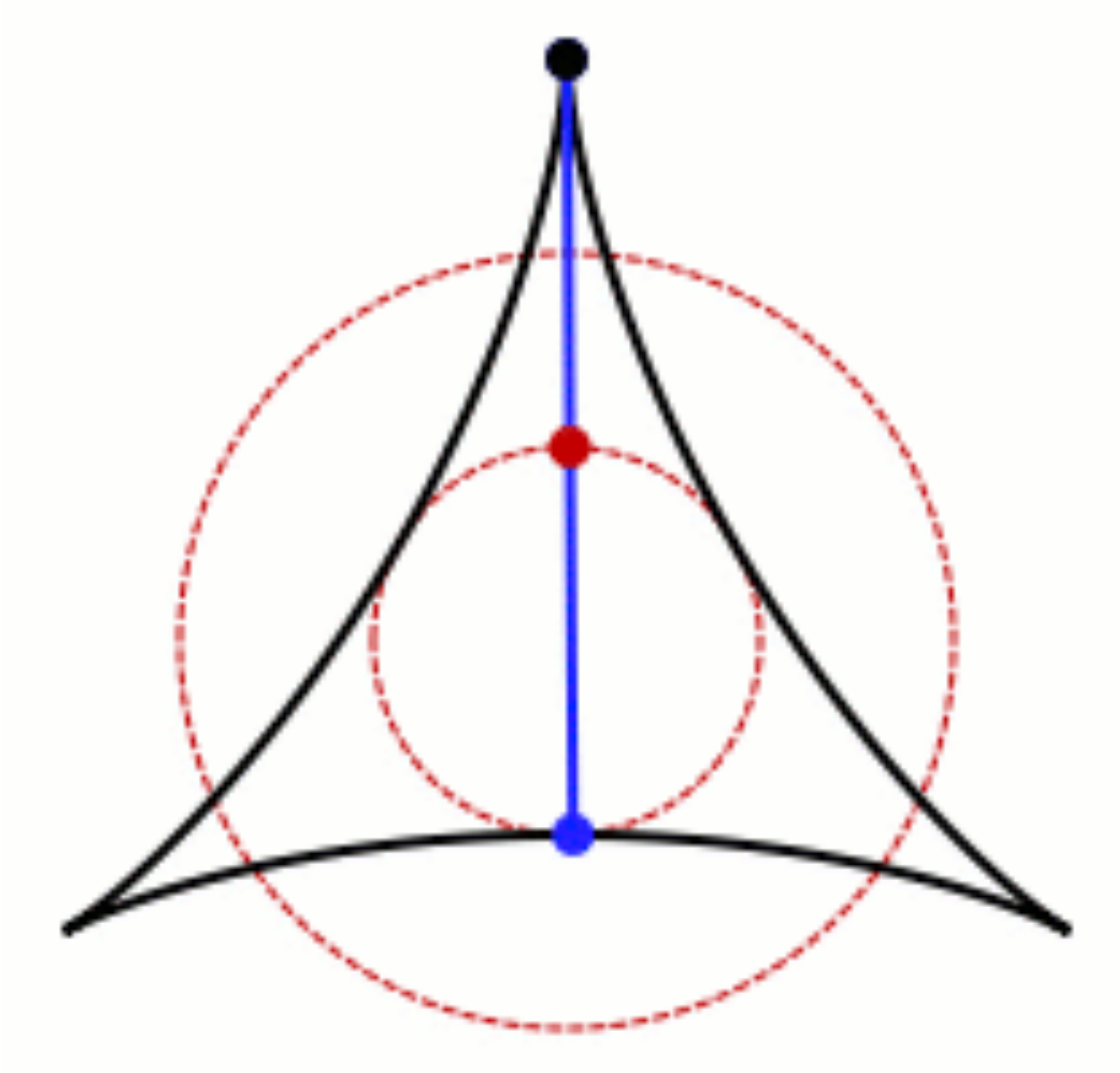
Tra gli insiemi di Kakeya ne esiste uno di area minima>0?

Il problema di Kakeya

Un insieme del piano si dice di Kakeya se in esso è possibile ruotare un segmento di lunghezza unitaria di 180 gradi facendolo ritornare alla posizione iniziale.

Esempio. Un disco di raggio 1/2

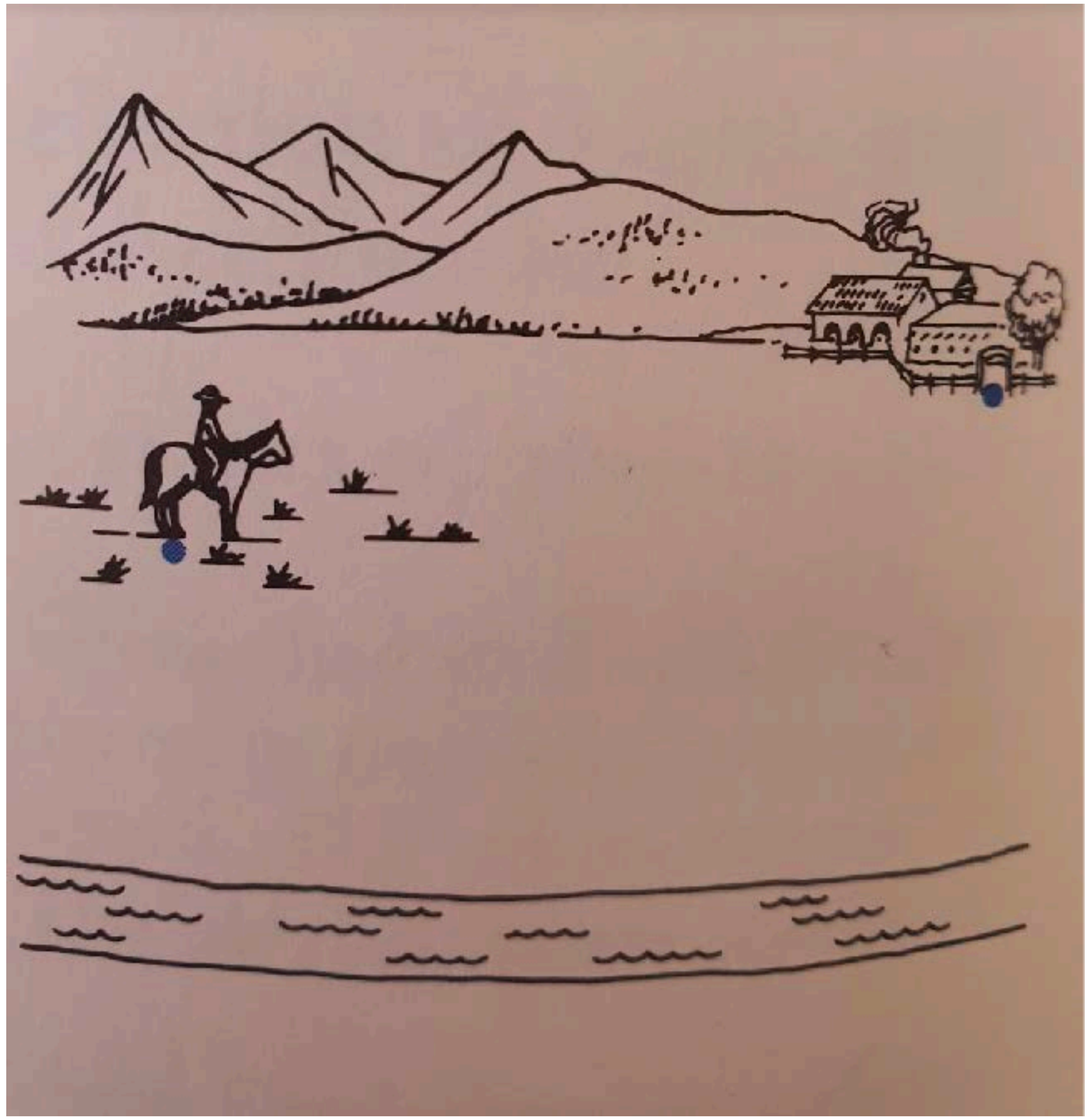
Esempio. Un deltoide



Tra gli insiemi di Kakeya ne esiste uno di area minima>0? **NO**

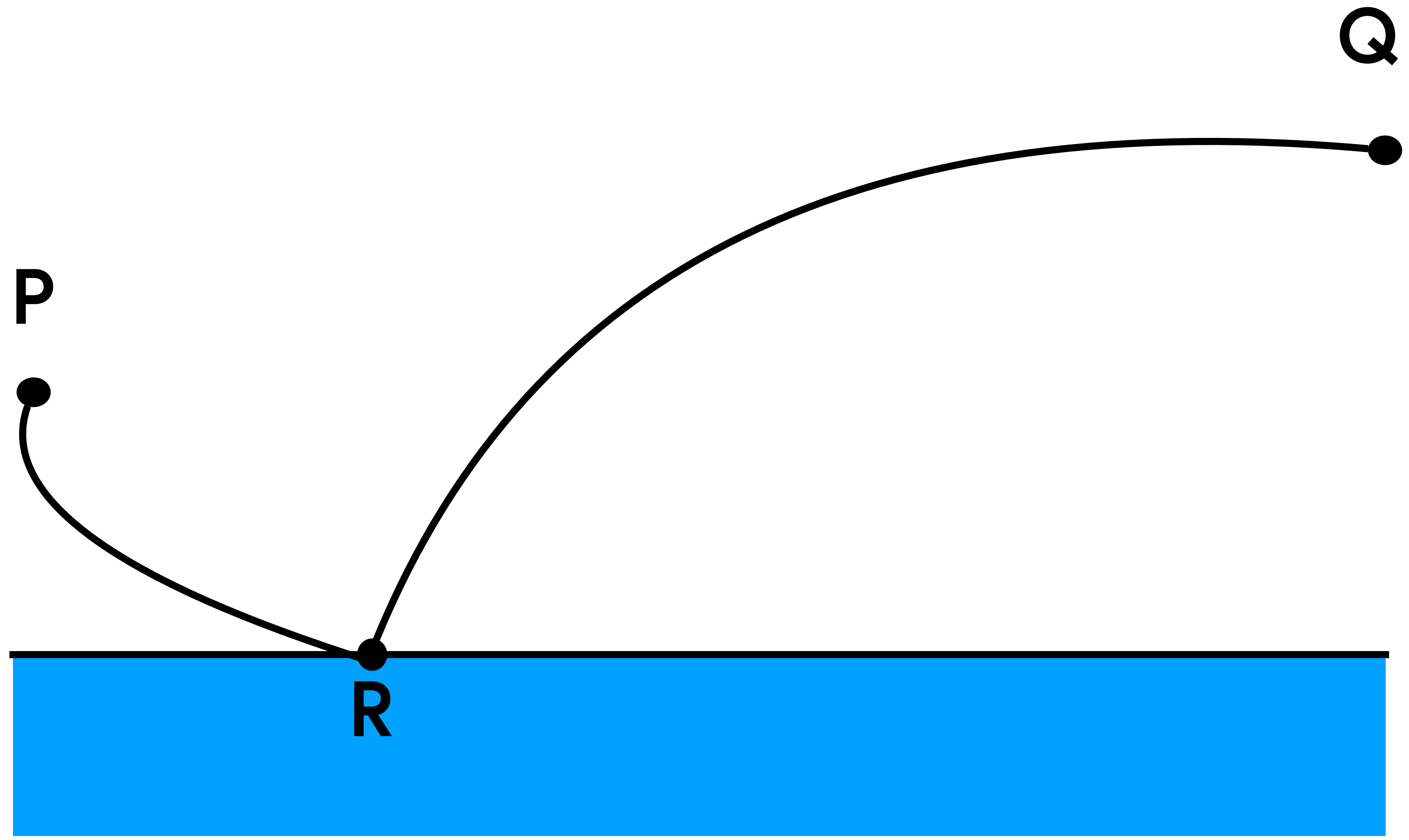
Problemi di una variabile

Il percorso di lunghezza minima abbeverando il cavallo



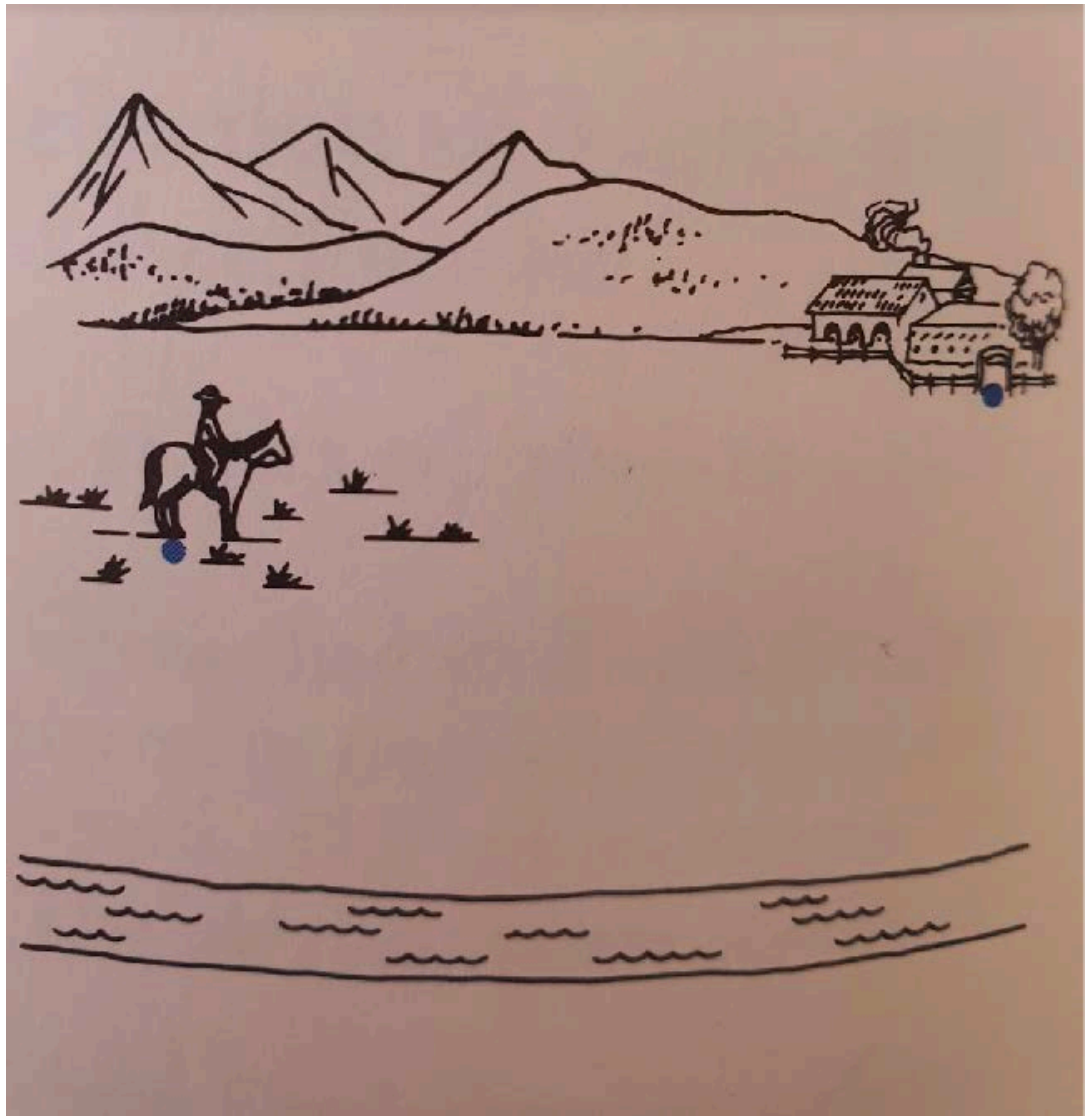
Percorso di lunghezza minima per andare da

P a Q passando per un punto R del bordo del fiume?



Problemi di una variabile

Il percorso di lunghezza minima abbeverando il cavallo

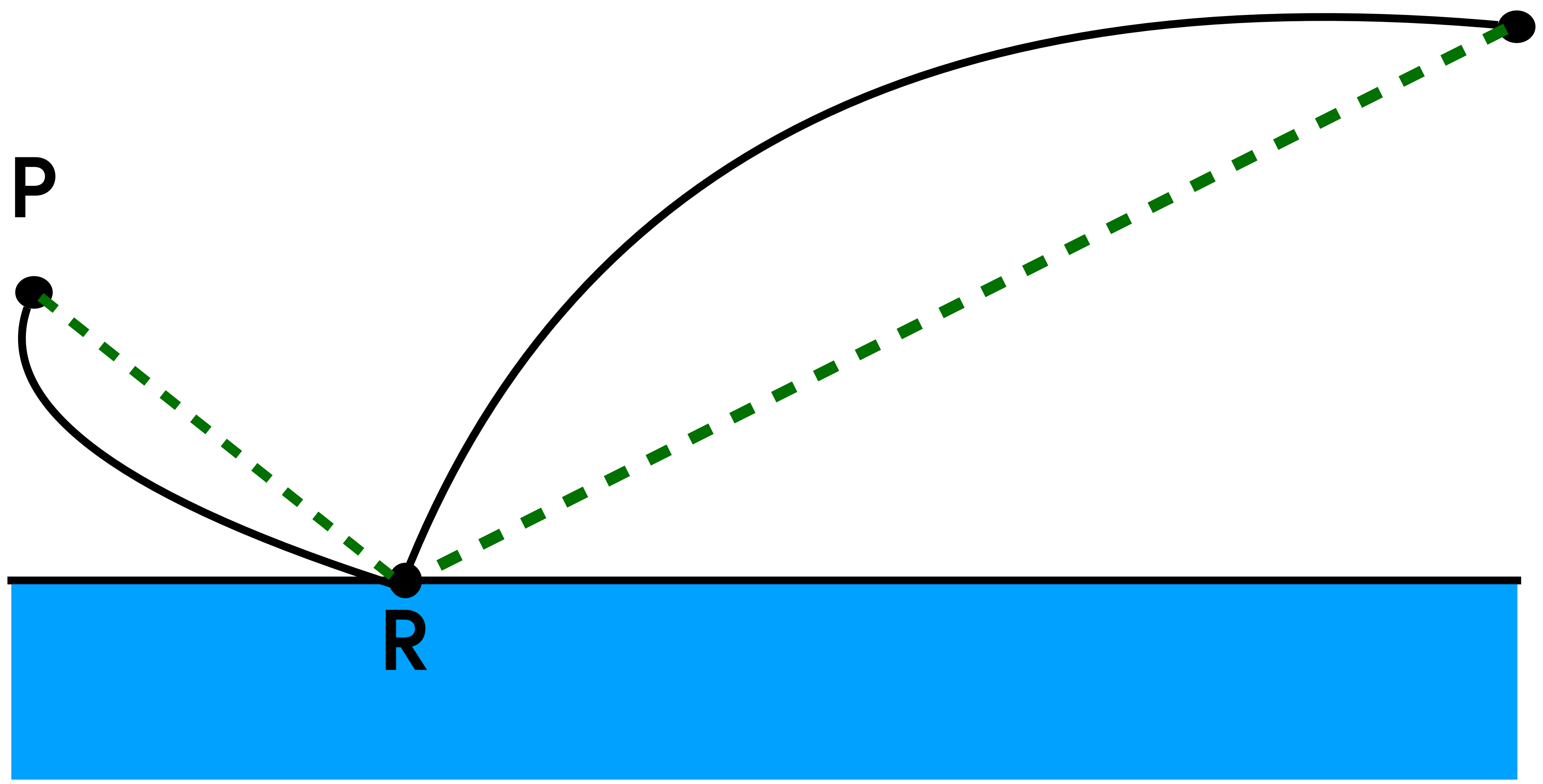


Percorso di lunghezza minima per andare da

P a Q passando per un punto R del bordo del fiume?

1) Convengono due segmenti

2) Quale R?



WEB

1. Connect to www.wooclap.com/IISVALDAGNO
2. You can participate

Qual è il cammino più corto?

RISPOSTA: D

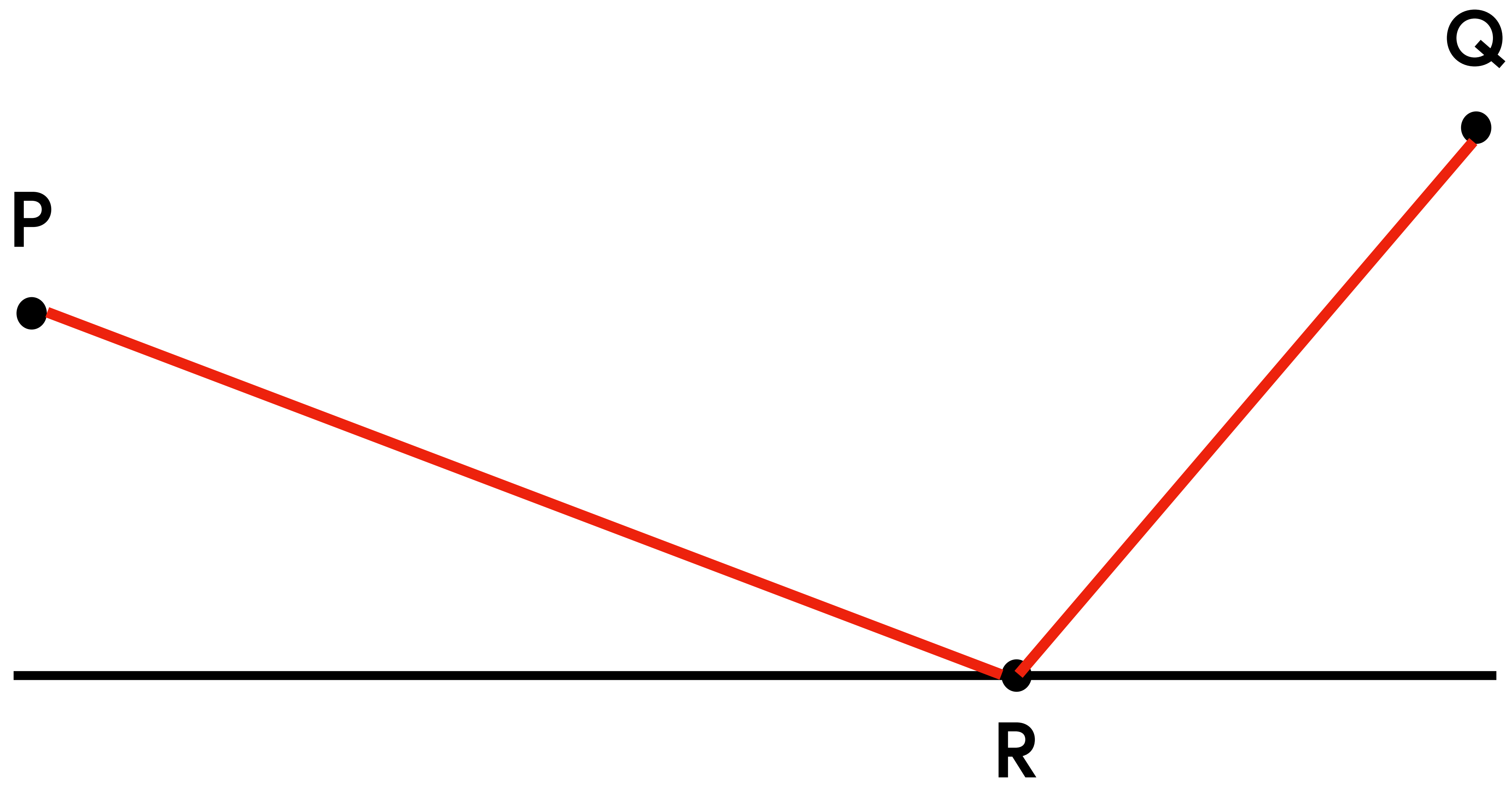
RISPOSTA: D

Dimostrazione.

RISPOSTA: D

Dimostrazione.

Consideriamo una traiettoria che passa per un punto arbitrario R nel segmento sul fiume.

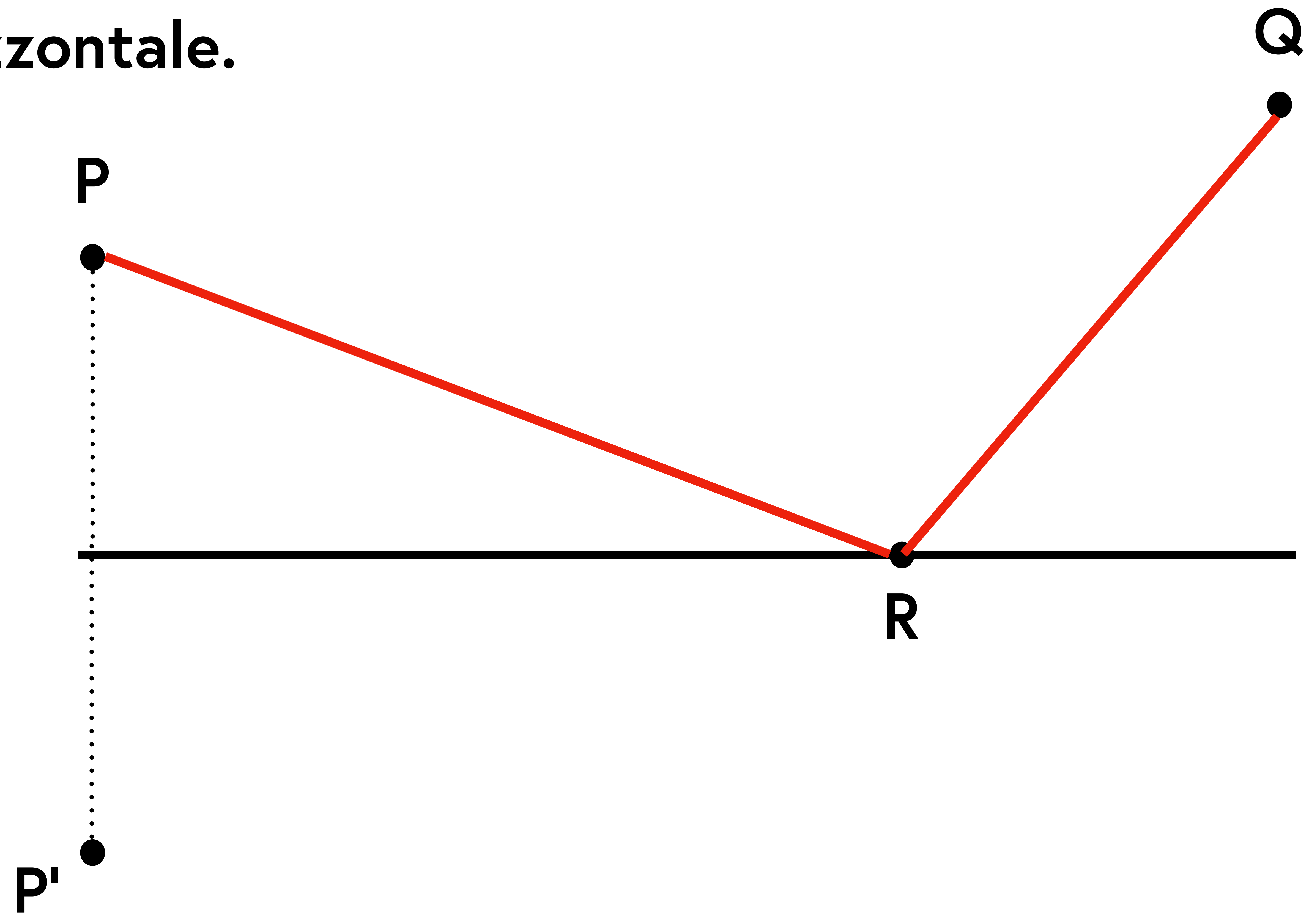


RISPOSTA: D

Dimostrazione.

Consideriamo una traiettoria che passa per un punto arbitrario R nel segmento sul fiume.

Sia P' simmetrico di P rispetto all'asse orizzontale.



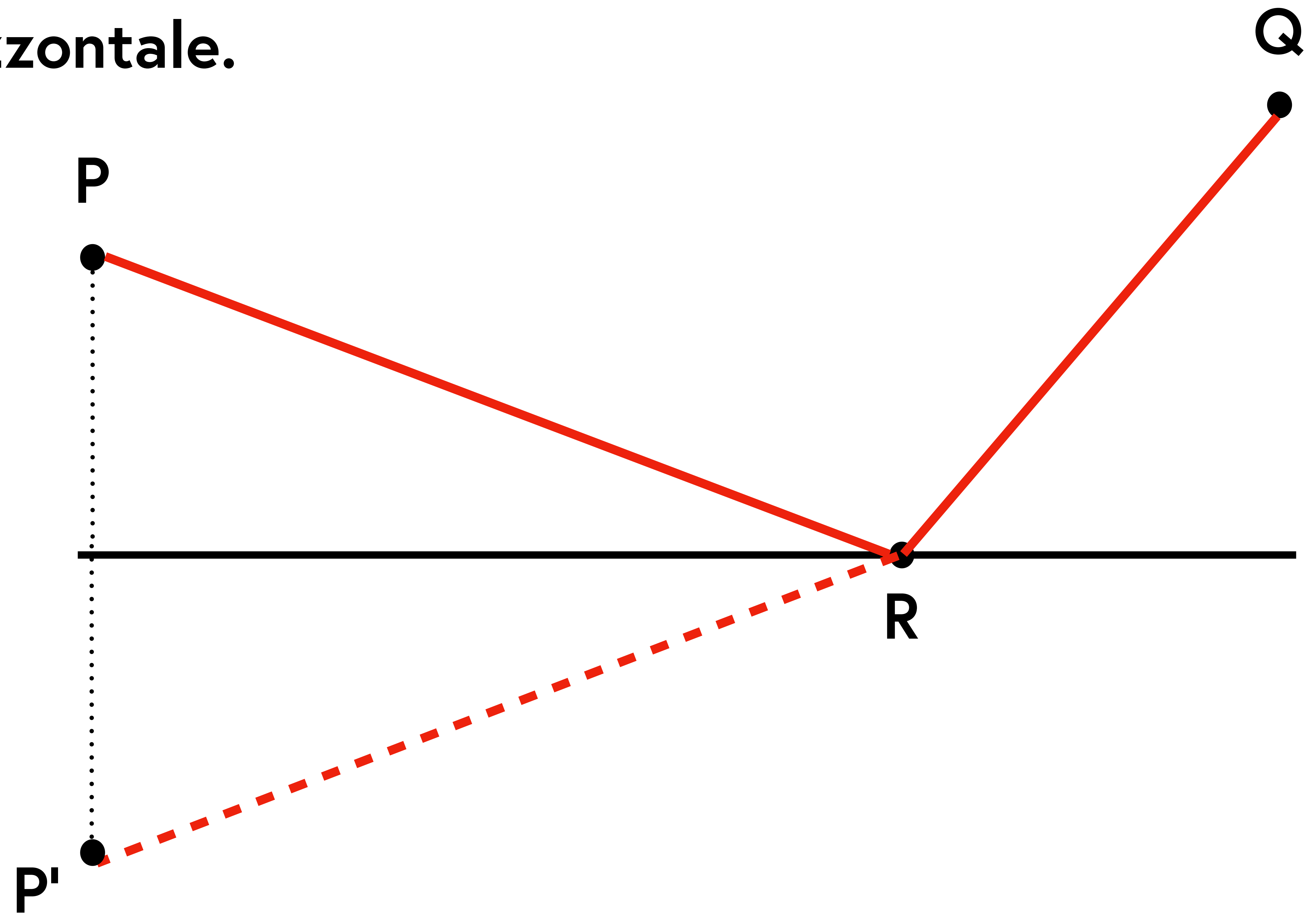
RISPOSTA: **D**

Dimostrazione.

Consideriamo una traiettoria che passa per un punto arbitrario R nel segmento sul fiume.

Sia P' simmetrico di P rispetto all'asse orizzontale.

$$PR + RQ = P'R + RQ$$

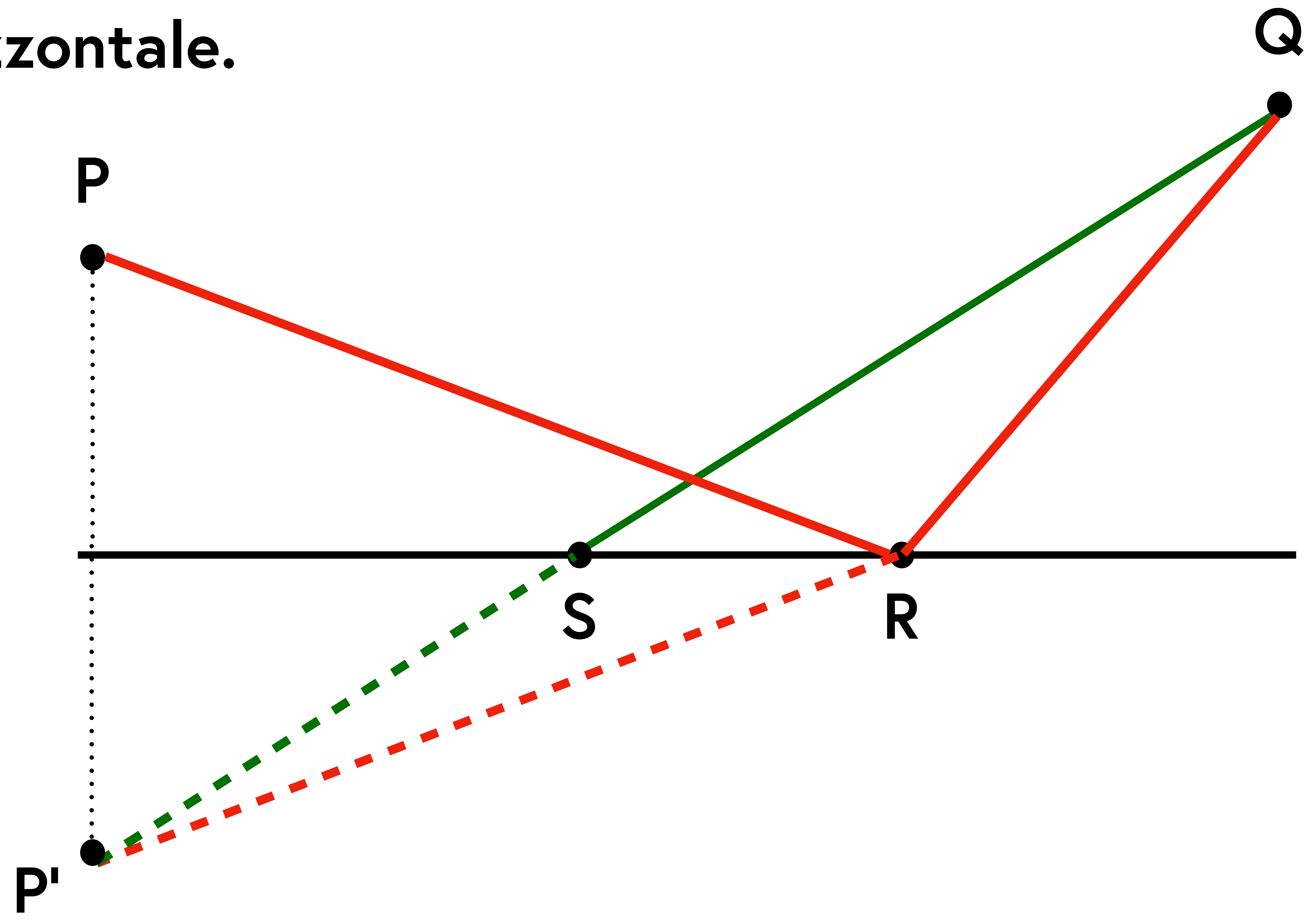


RISPOSTA: D

Dimostrazione.

Consideriamo una traiettoria che passa per un punto arbitrario R nel segmento sul fiume.

Sia P' simmetrico di P rispetto all'asse orizzontale.



$$PR + RQ = P'R + RQ$$

$$P'R + RQ \geq P'Q$$

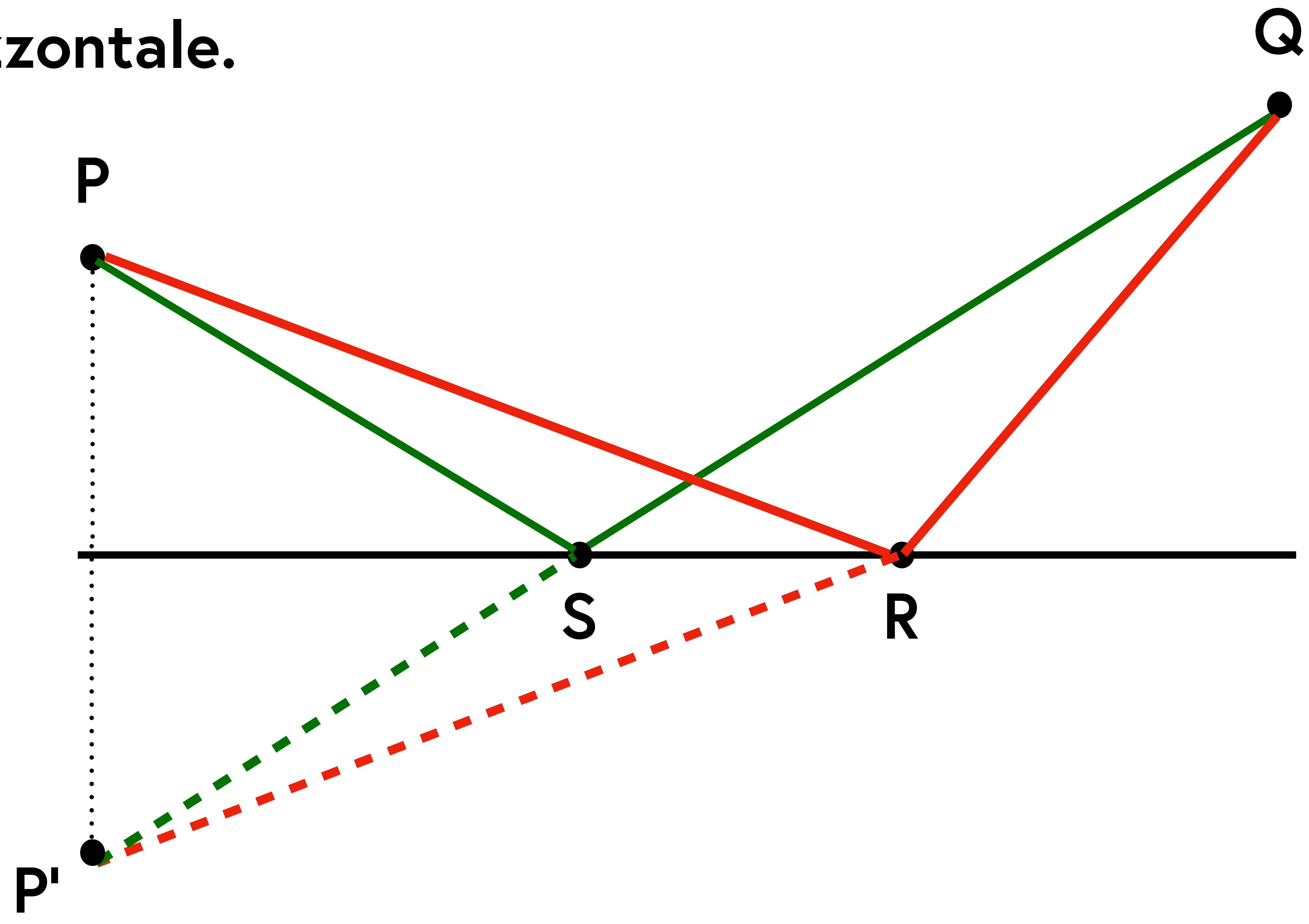
$$P'Q = P'S + SQ$$

RISPOSTA: D

Dimostrazione.

Consideriamo una traiettoria che passa per un punto arbitrario R nel segmento sul fiume.

Sia P' simmetrico di P rispetto all'asse orizzontale.



$$PR + RQ = P'R + RQ$$

$$P'R + RQ \geq P'Q$$

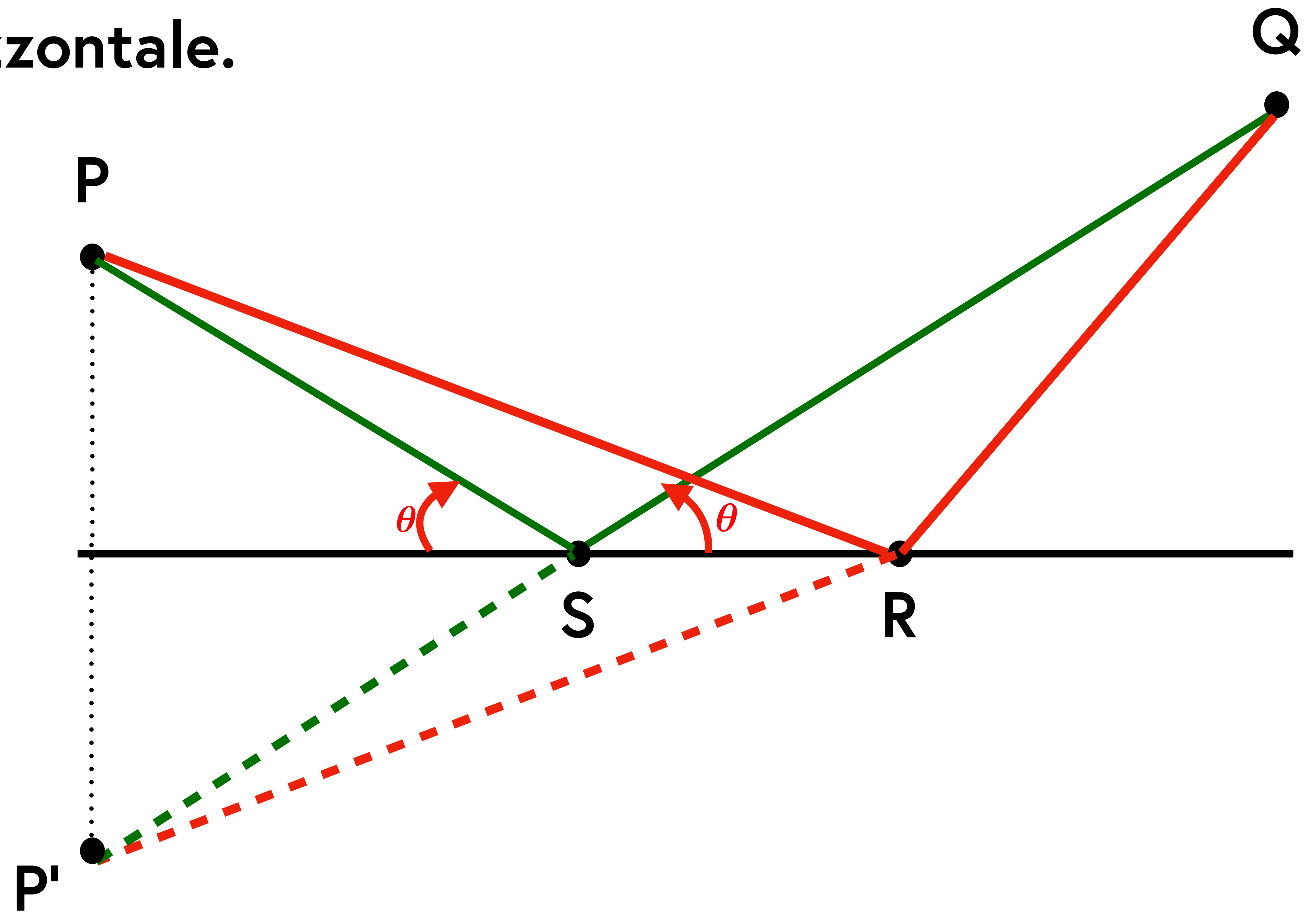
$$P'Q = P'S + SQ = PS + SQ$$

RISPOSTA: D

Dimostrazione.

Consideriamo una traiettoria che passa per un punto arbitrario R nel segmento sul fiume.

Sia P' simmetrico di P rispetto all'asse orizzontale.



$$PR + RQ = P'R + RQ$$

$$P'R + RQ \geq P'Q$$

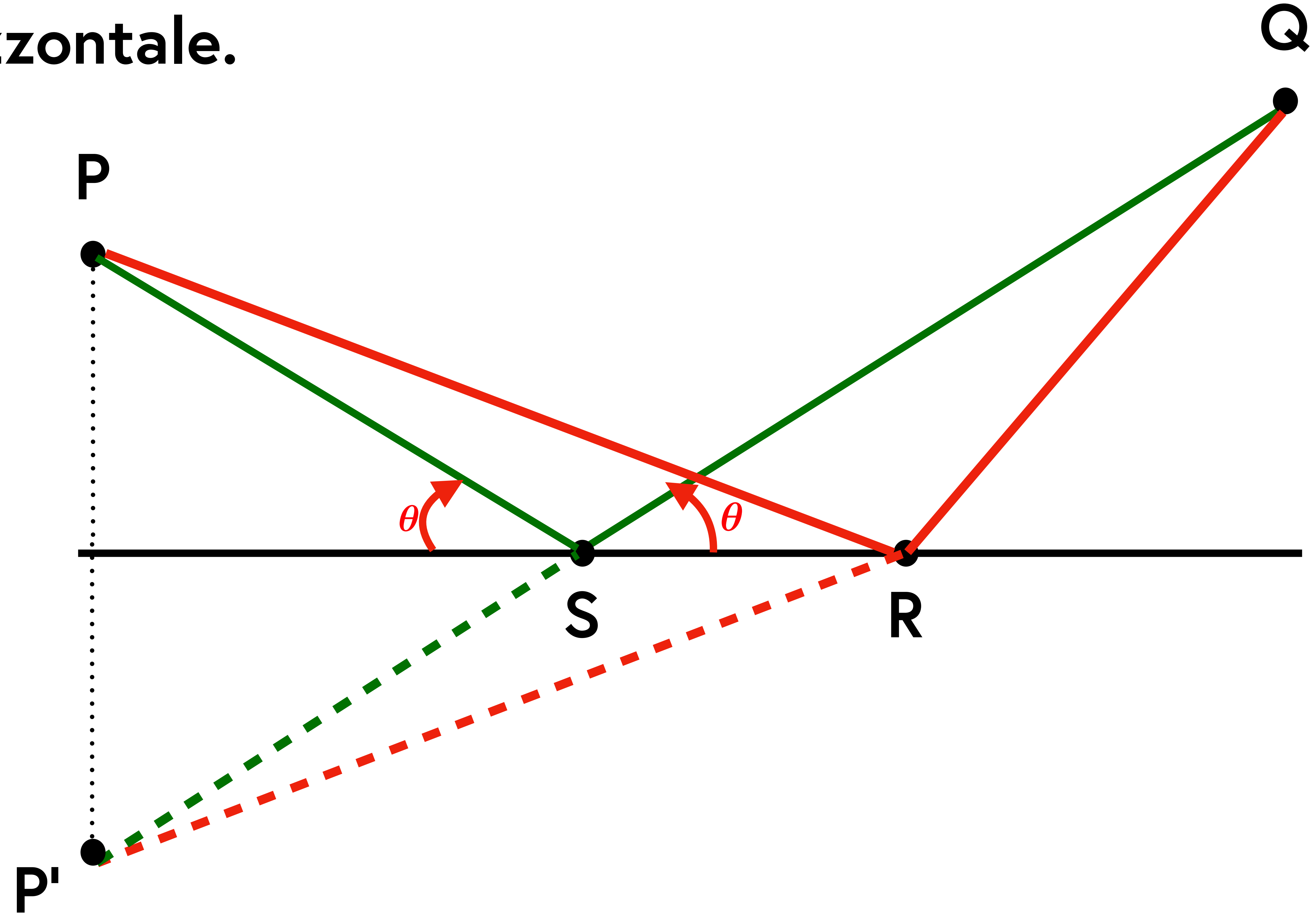
$$P'Q = P'S + SQ = PS + SQ$$

RISPOSTA: **D**

Dimostrazione.

Consideriamo una traiettoria che passa per un punto arbitrario R nel segmento sul fiume.

Sia P' simmetrico di P rispetto all'asse orizzontale.



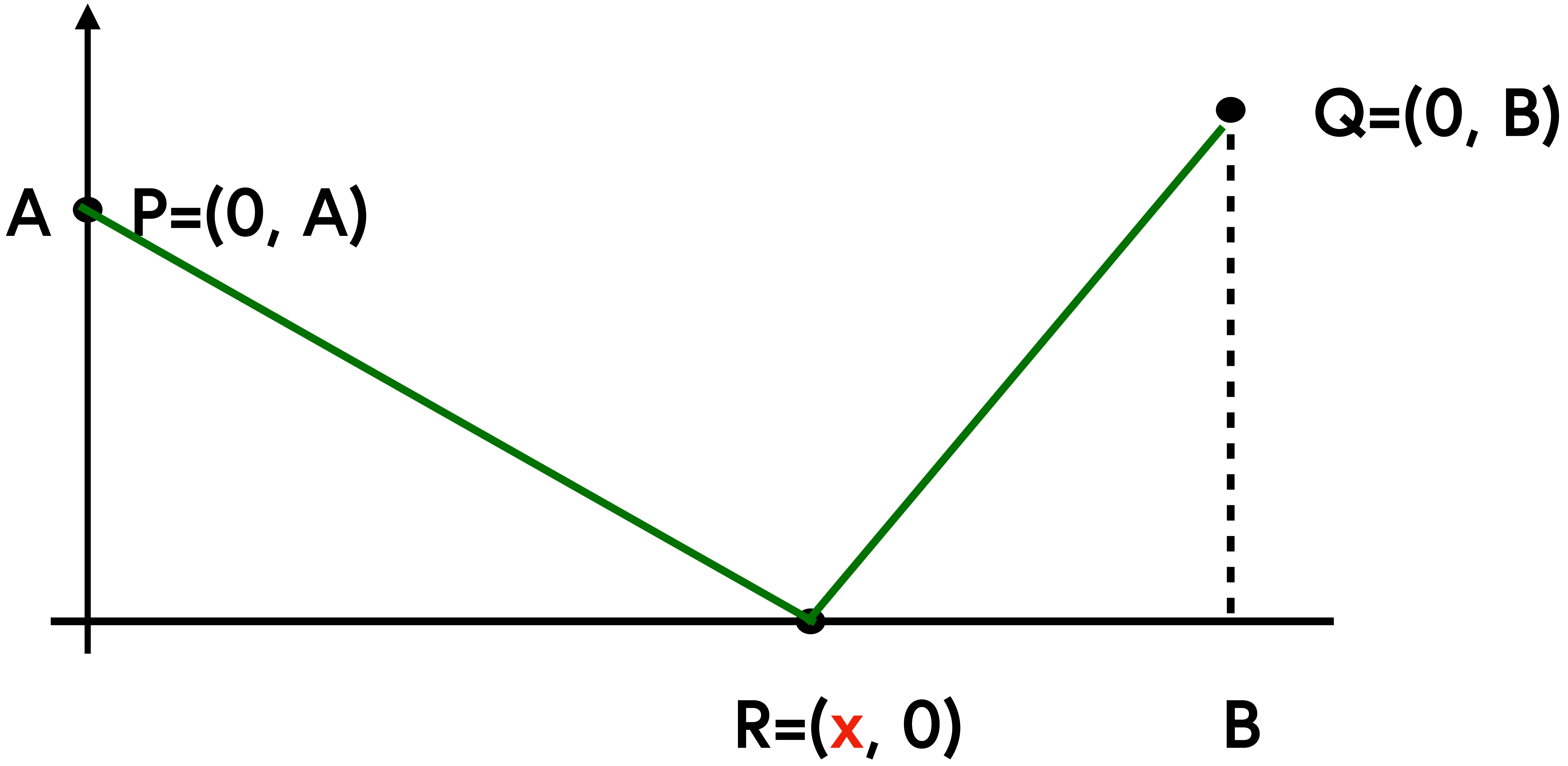
$$\boxed{PR + RQ} = P'R + RQ$$

$$P'R + RQ \boxed{\geq} P'Q$$

$$P'Q = P'S + SQ = \boxed{PS + SQ}$$

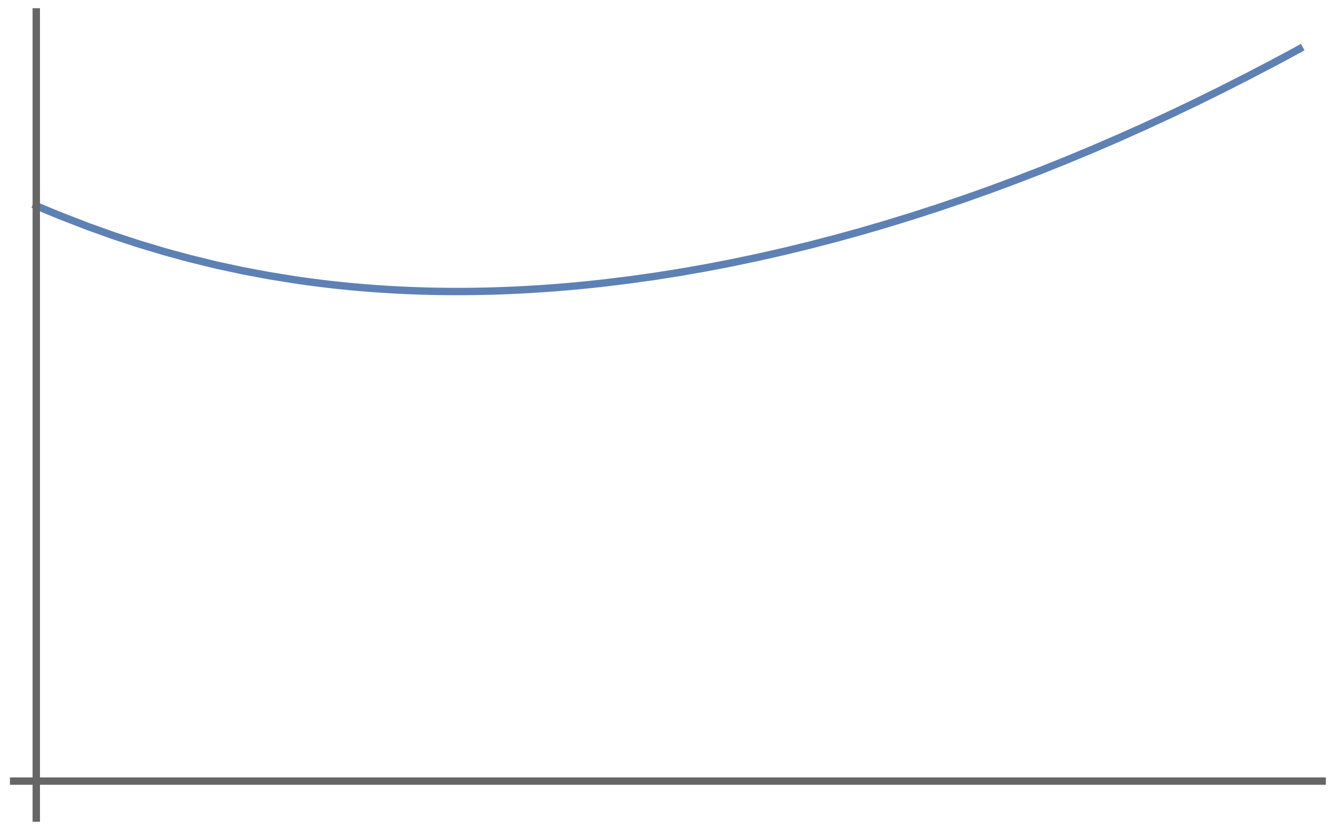
$\square$

Metodo alternativo

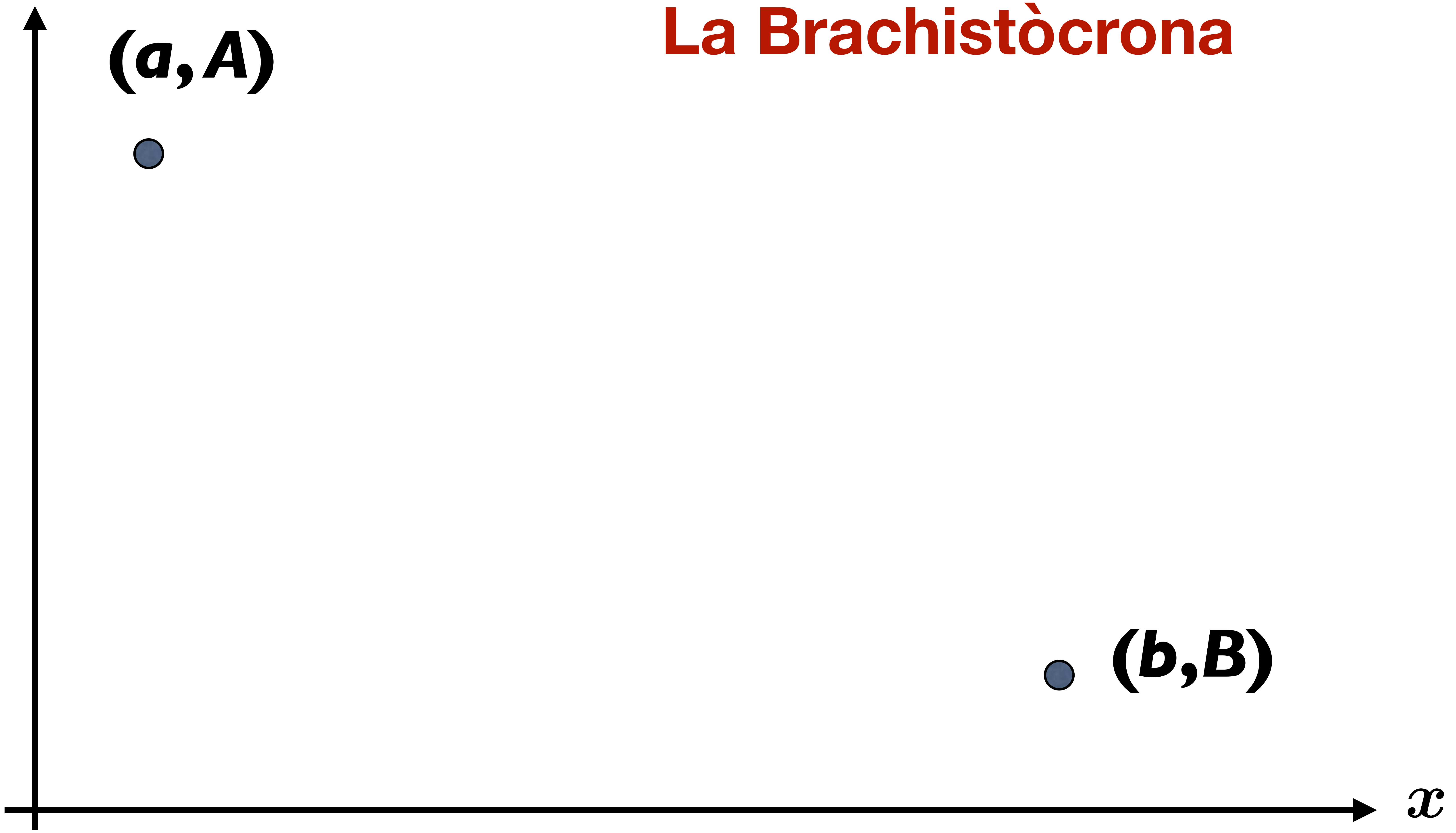


Lunghezza:

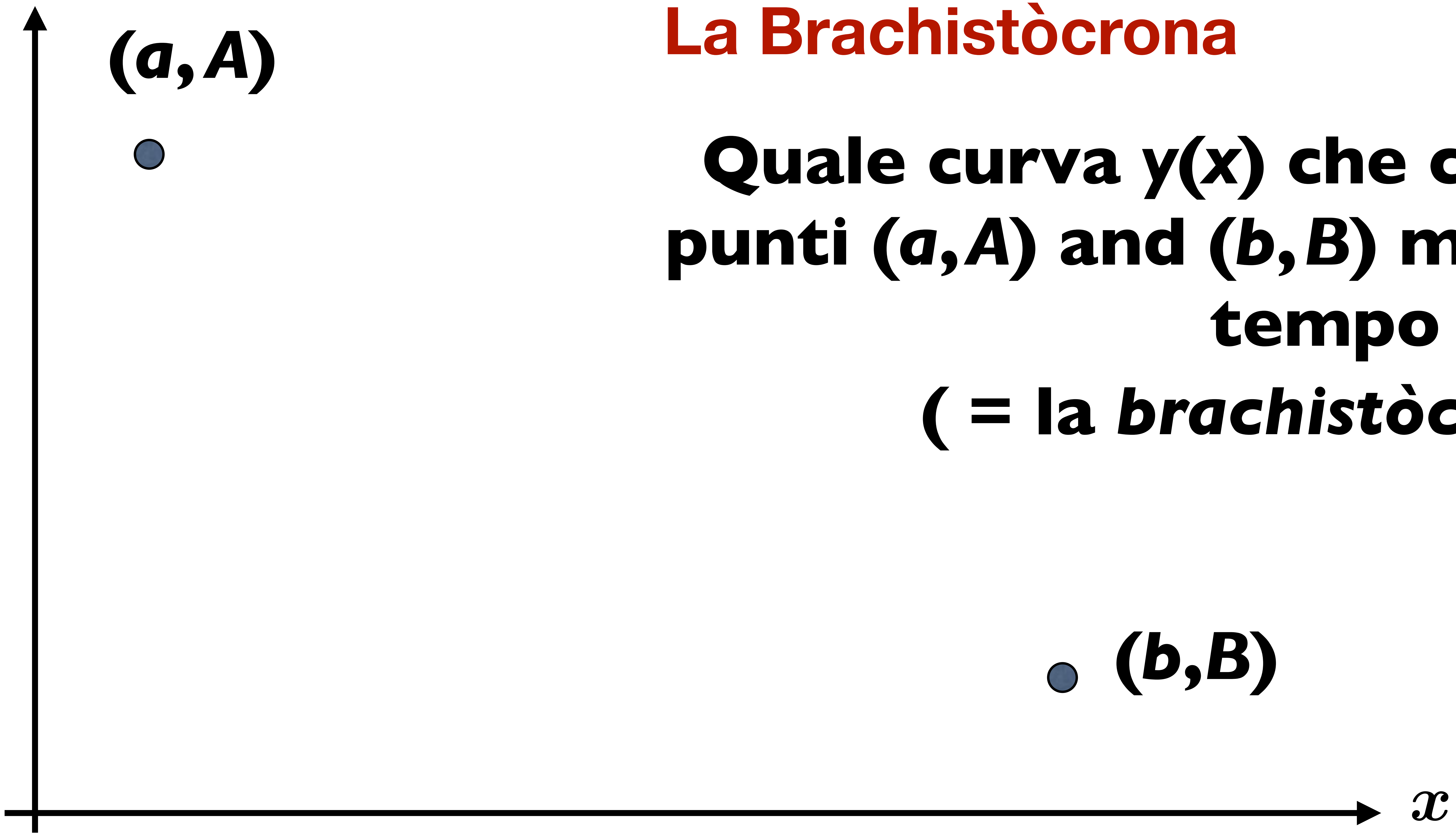
$$\sqrt{x^2 + A^2} + \sqrt{(B-x)^2 + B^2} := f(x), x \in [0, B]$$



La Brachistòcrona



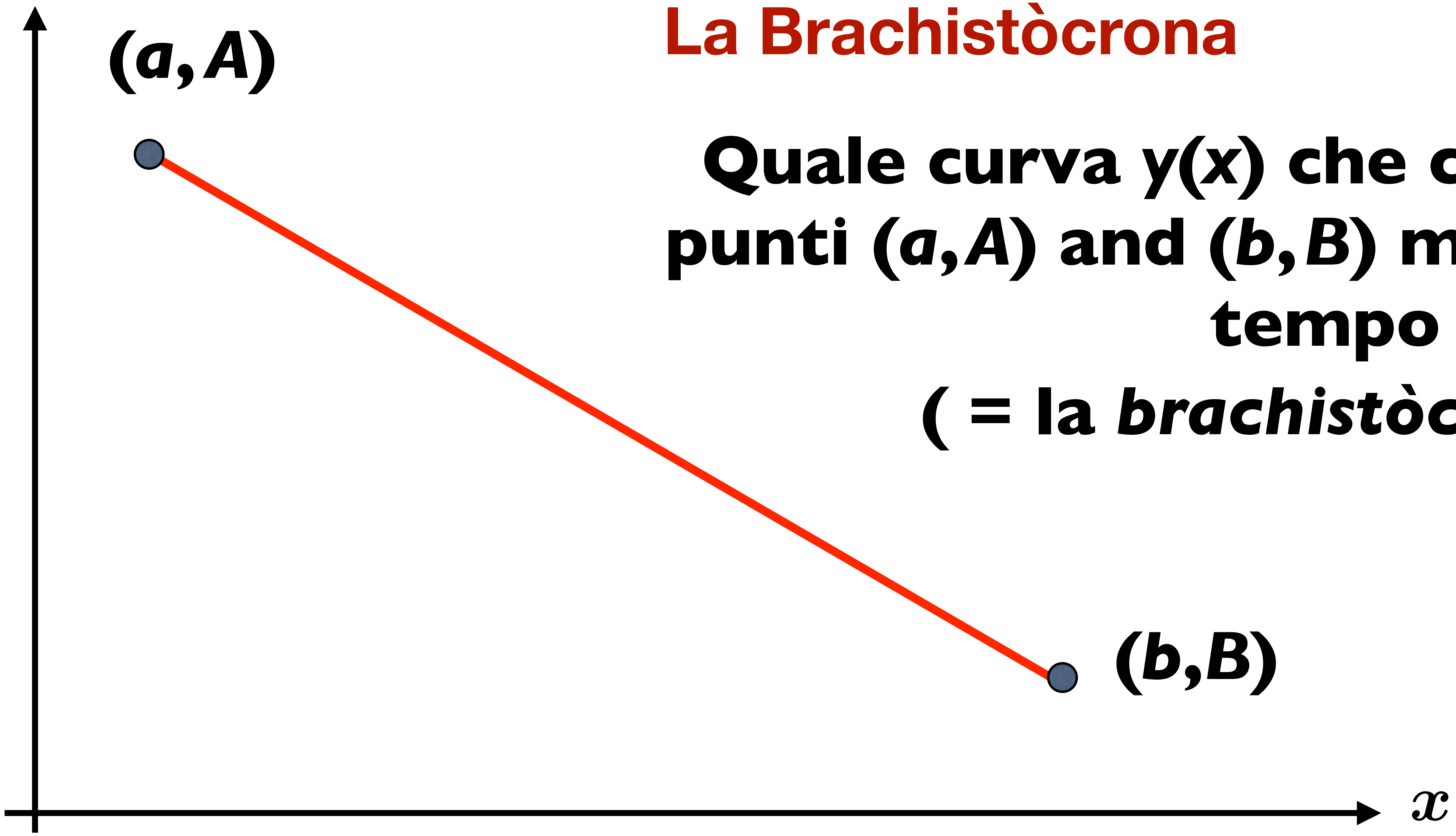
La Brachistòcrona



Quale curva *y*(*x*) che congiunge i punti (*a*, *A*) and (*b*, *B*) minimizza il tempo di discesa?

(= la *brachistòcrona*)

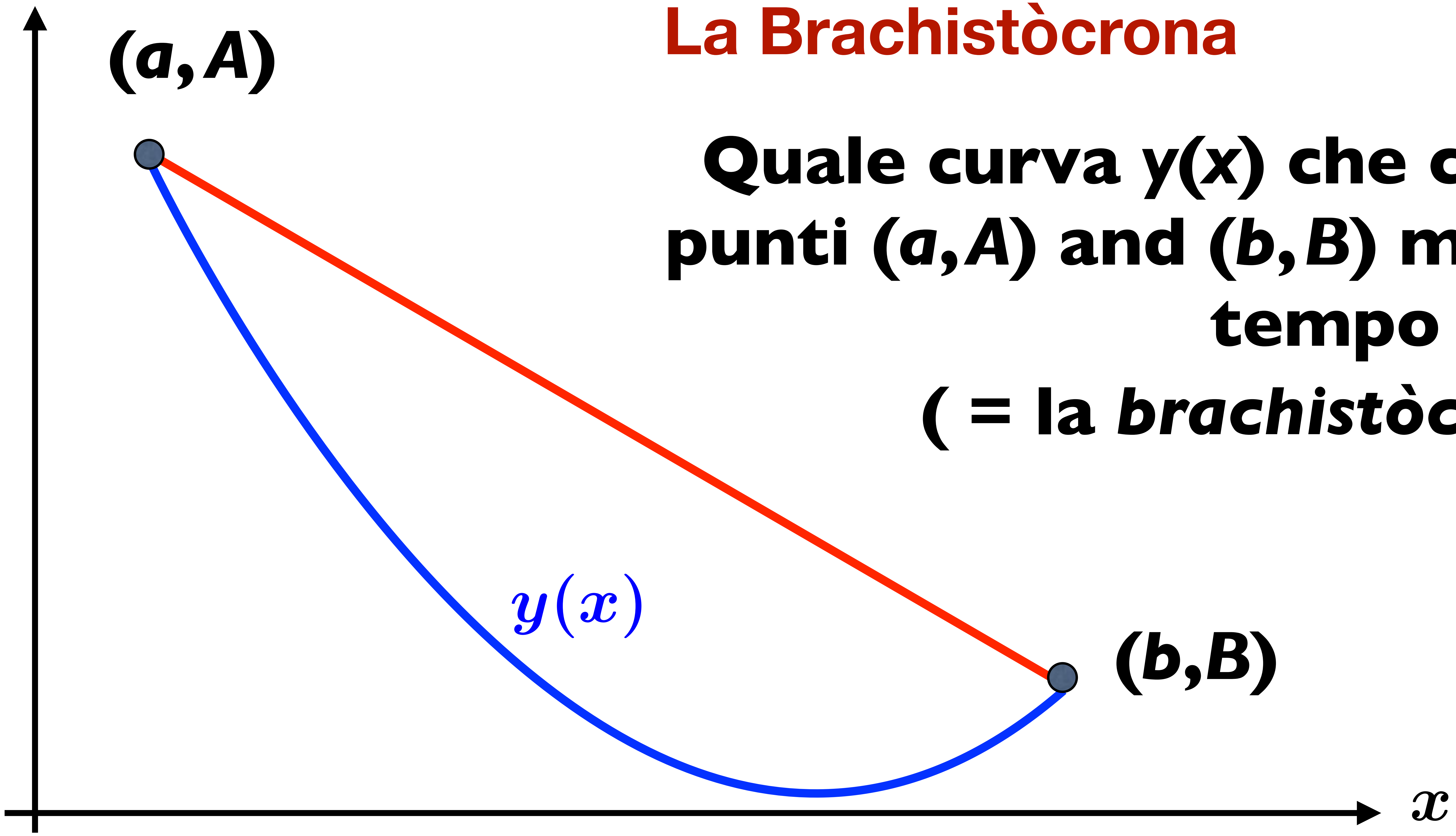
La Brachistòcrona



Quale curva $y(x)$ che congiunge i punti (a,A) and (b,B) minimizza il tempo di discesa?

(= la *brachistòcrona*)

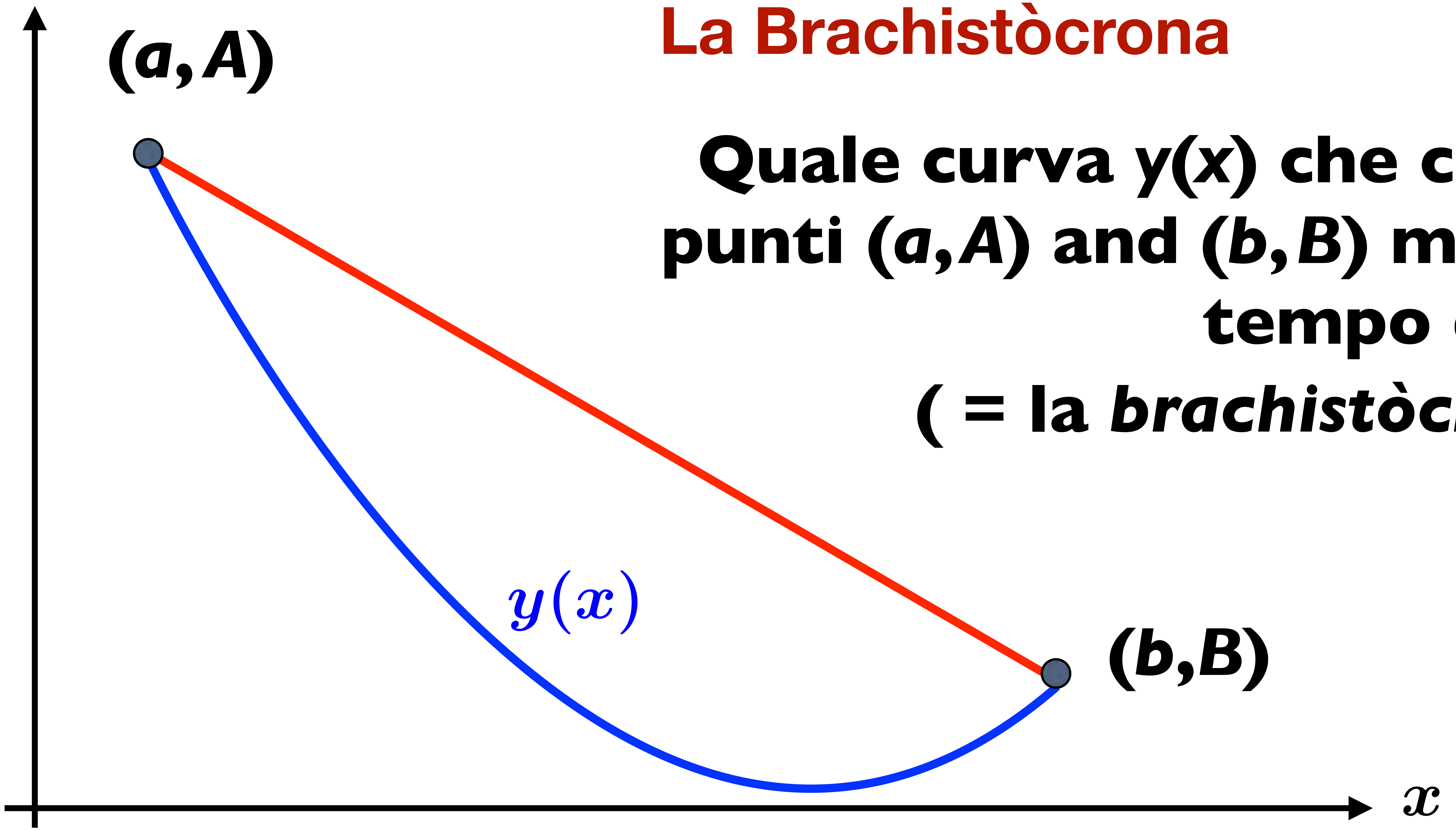
La Brachistòcrona



Quale curva $y(x)$ che congiunge i punti (a,A) and (b,B) minimizza il tempo di discesa?

(= la *brachistòcrona*)

La Brachistòcrona



Quale curva y(*x*) che congiunge i punti (*a*,*A*) and (*b*,*B*) minimizza il tempo di discesa?

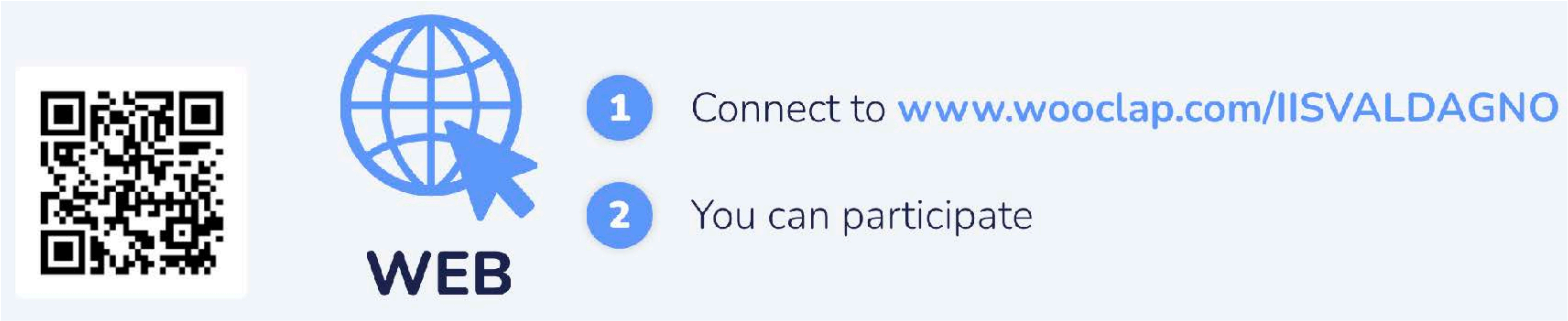
(= la *brachistòcrona*)

Si vuole minimizzare

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)-A}}\,dx$$

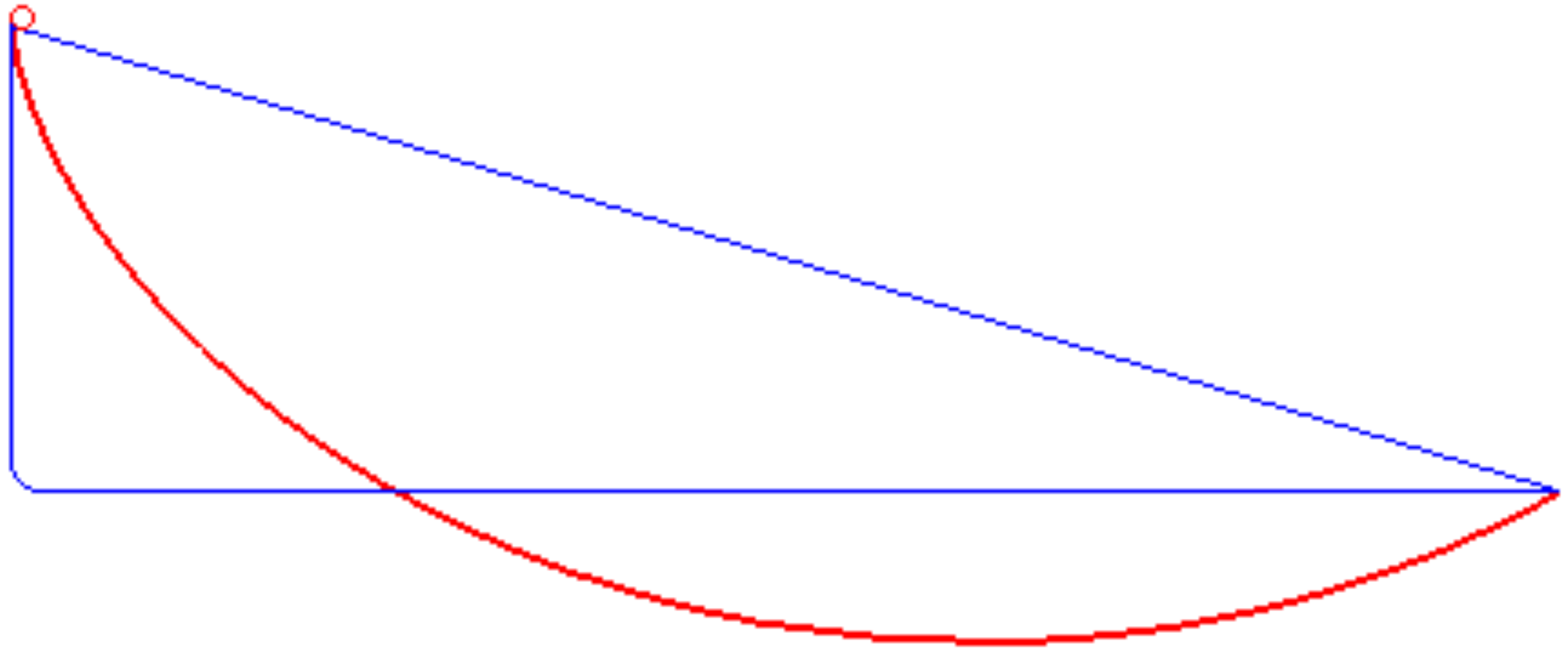
tra tutte le curve y(*x*) che soddisfano y(*a*) = *A*, y(*b*) = *B*

Proviamo ad indovinare...



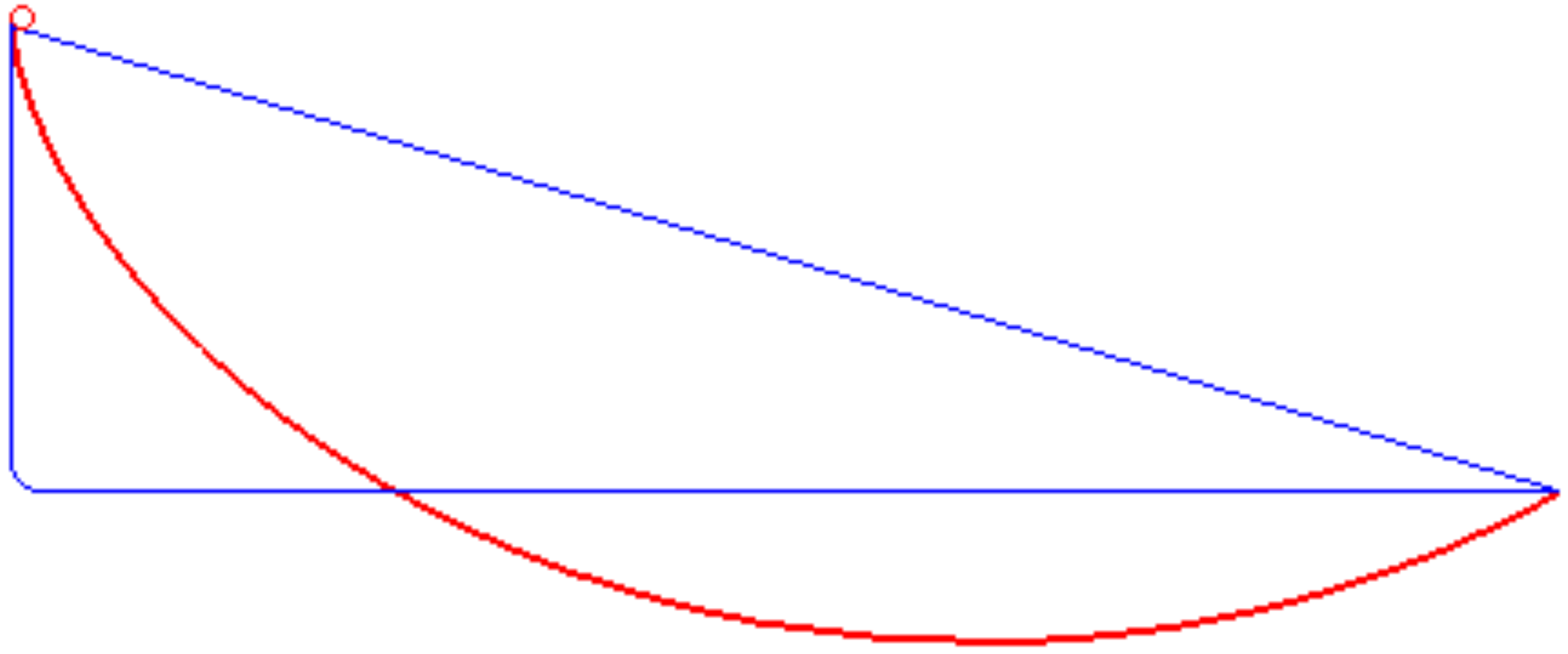
La Brachistòcrona

Soluzione? Un arco di cicloide



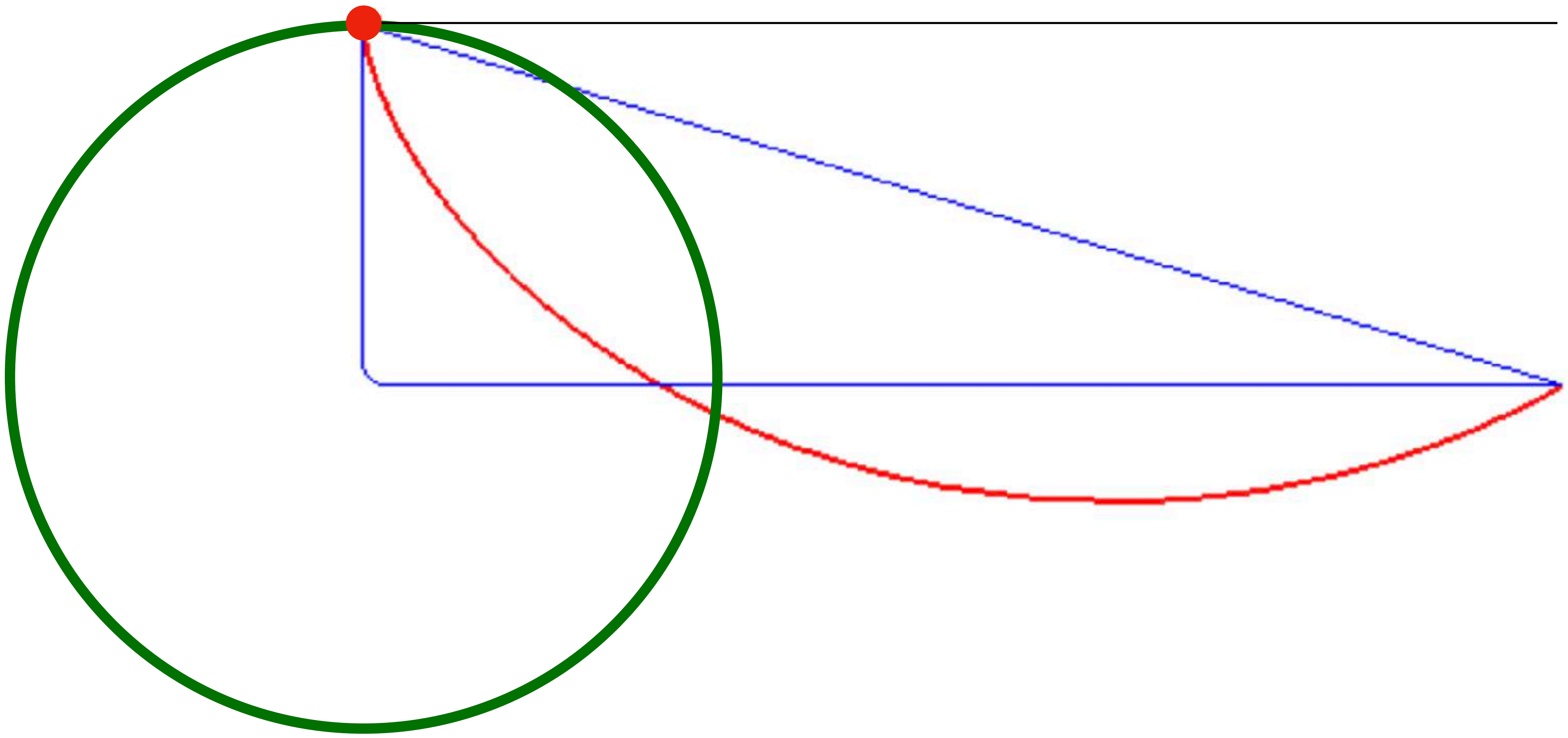
La Brachistòcrona

Soluzione? Un arco di cicloide

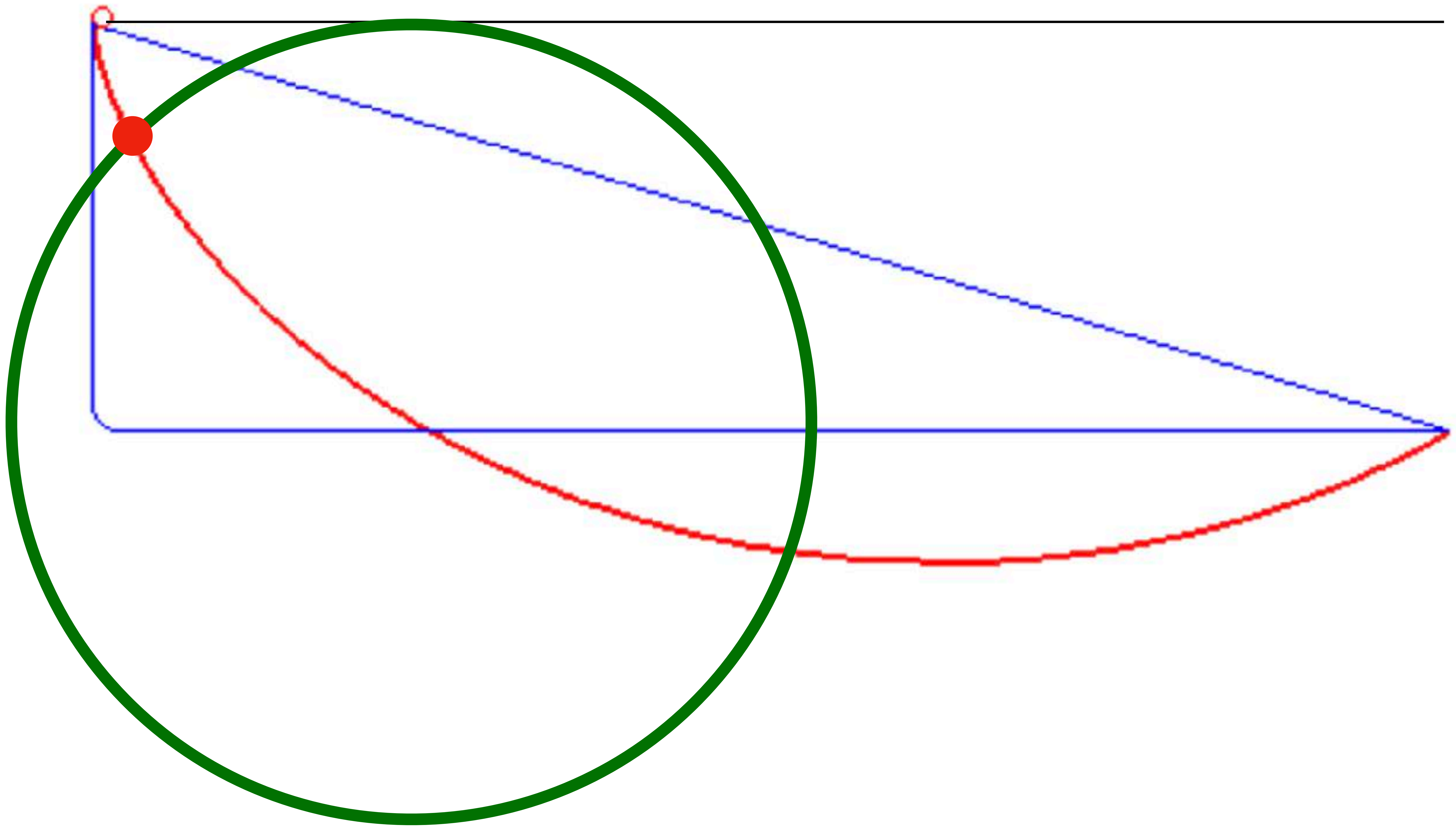



EPFL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

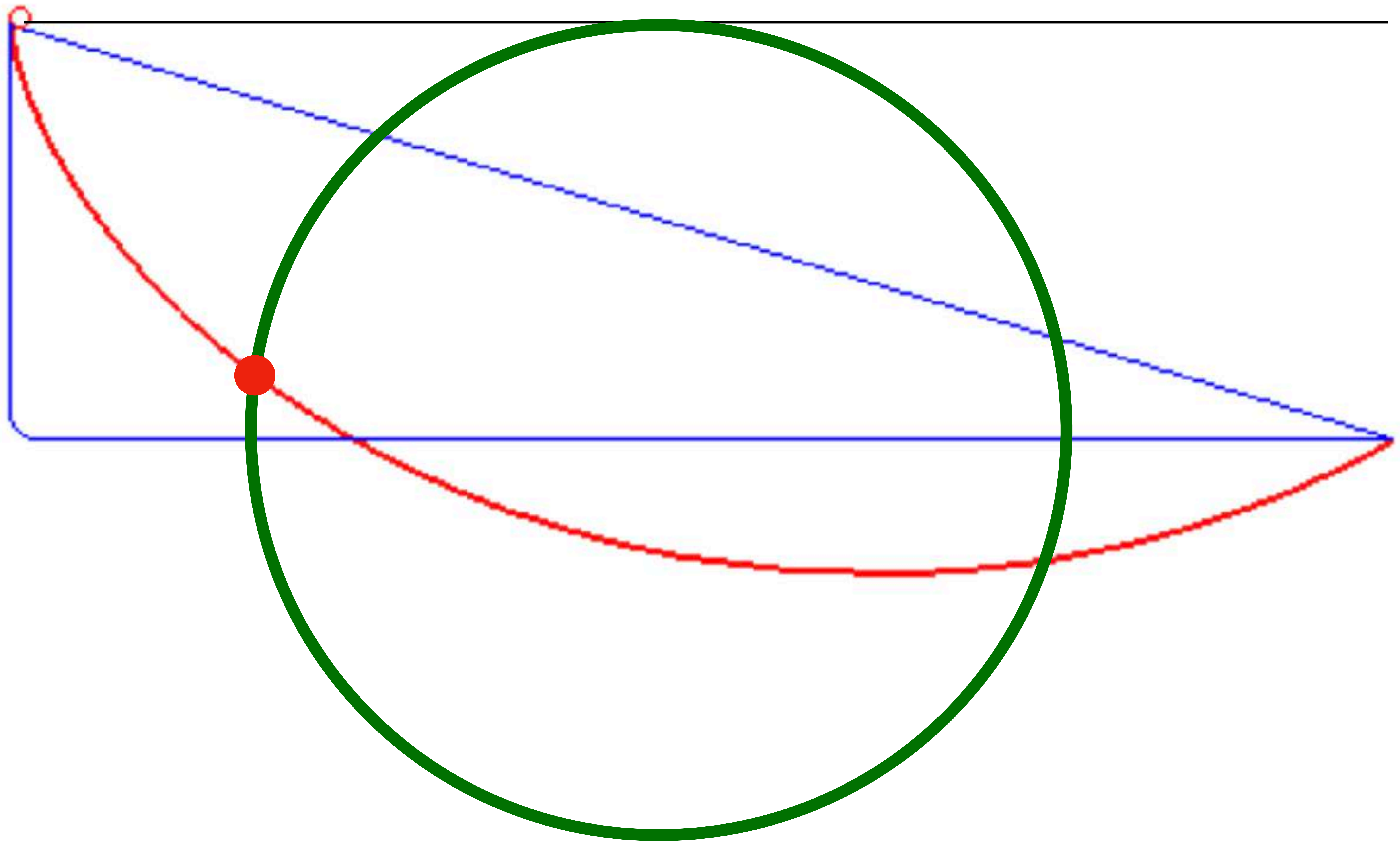

EPFL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE



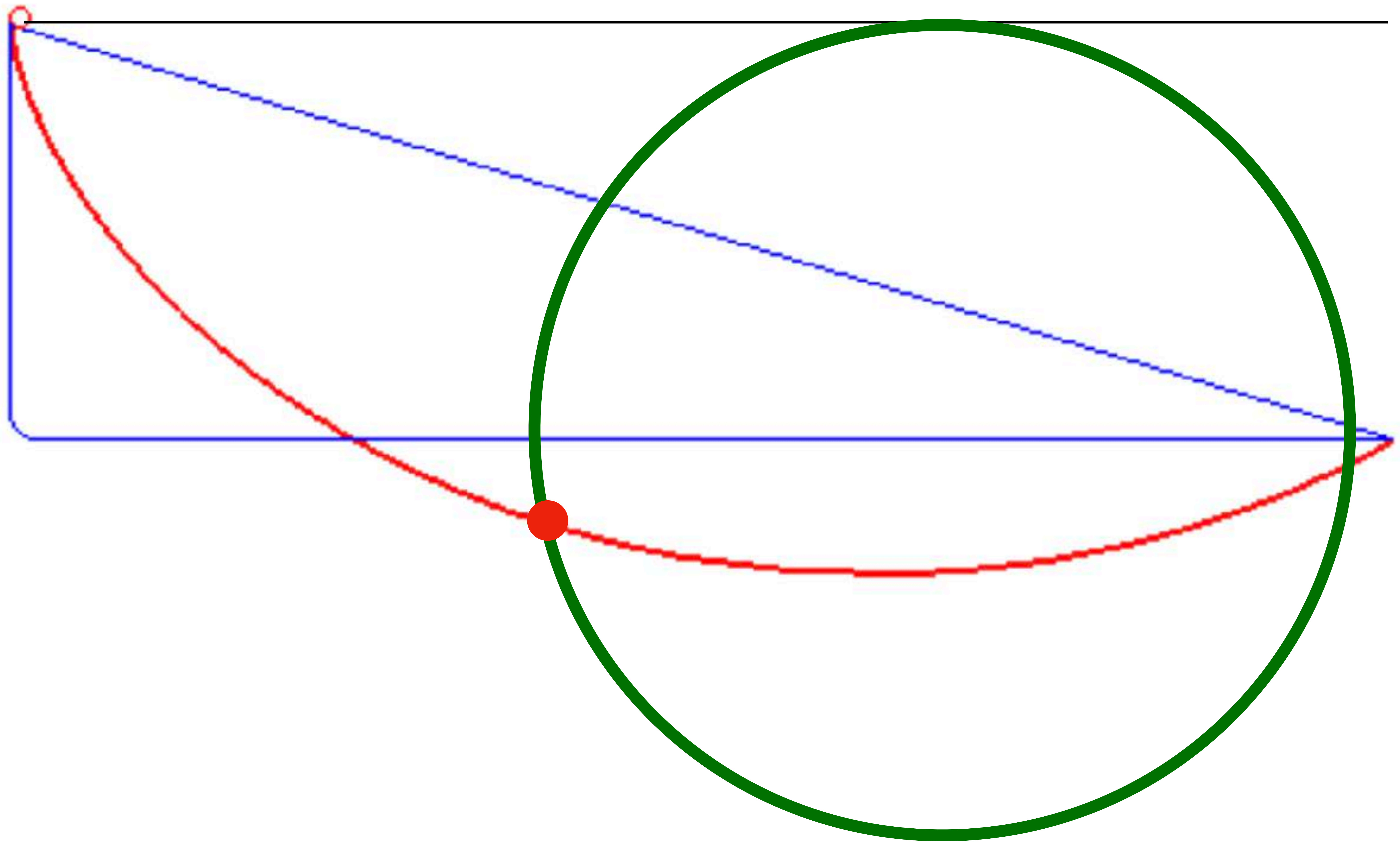
La cicloide



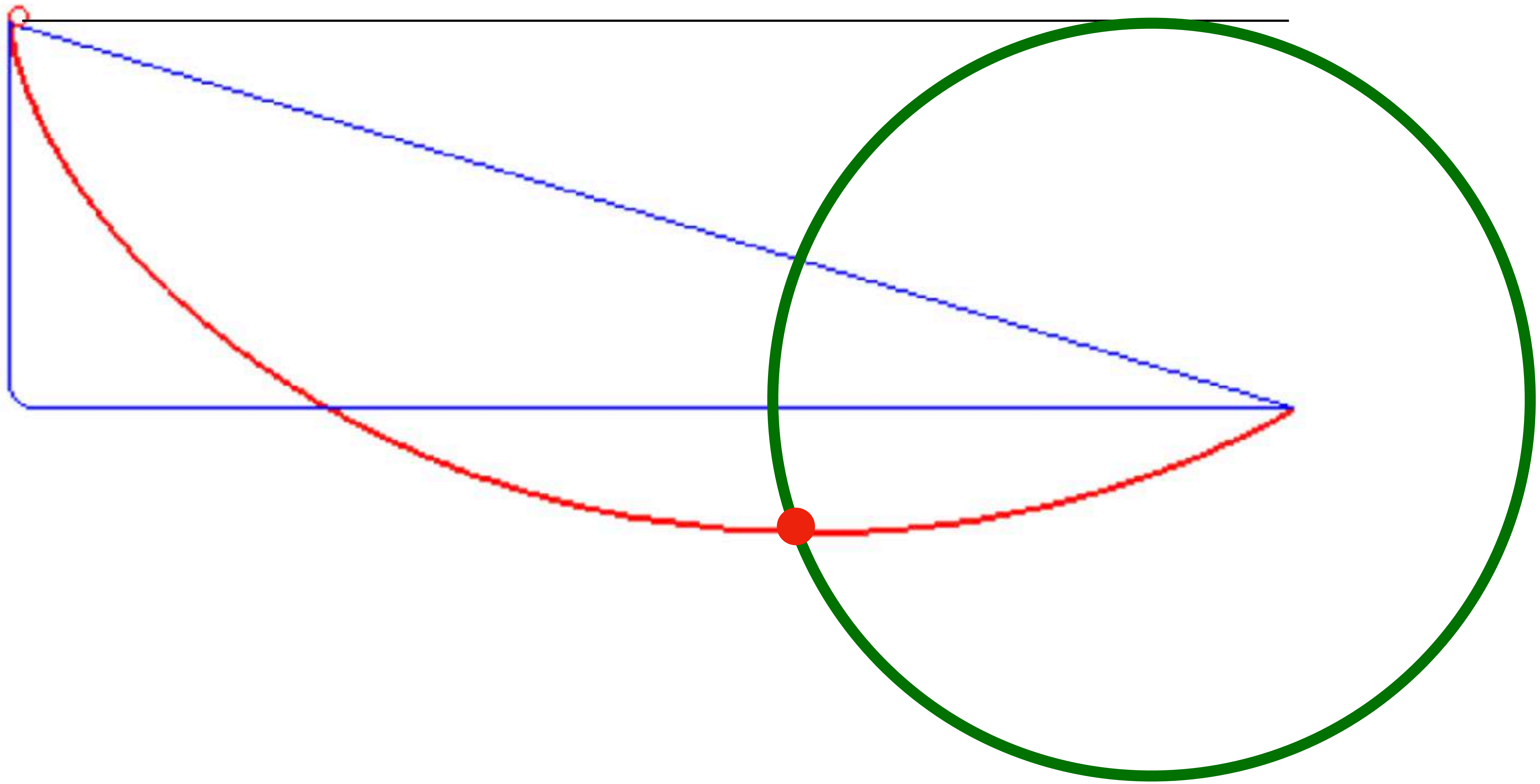
La cicloide



La cicloide



La cicloide



La cicloide

Il calcolo delle variazioni

L'incognita è una funzione/curva: ottimizzazione sulle curve

Leonhard Euler

1707-1783

Il calcolo delle variazioni

L'incongnita è una funzione/curva: ottimizzazione sulle curve

Leonhard Euler

1707-1783

- **800 pubblicazioni (+ corrispondenze)**

Il calcolo delle variazioni

L'incongnita è una funzione/curva: ottimizzazione sulle curve

Leonhard Euler

1707-1783

- 800 pubblicazioni (+ corrispondenze)
- Tra il 1725 e il 1800, Eulero =

Il calcolo delle variazioni

L'incognita è una funzione/curva: ottimizzazione sulle curve

Leonhard Euler

1707-1783

- **800 pubblicazioni (+ corrispondenze)**
- **Tra il 1725 e il 1800, Eulero =**

$$\frac{1}{3}\left(\text{mat} + \text{fis. mat} + \text{ing. mecc}\right)$$

Il calcolo delle variazioni

L'incongnita è una funzione/curva: ottimizzazione sulle curve

Leonhard Euler

1707-1783

- **800 pubblicazioni (+ corrispondenze)**
- **Tra il 1725 e il 1800, Eulero =**

$$\frac{1}{3}\left(\text{mat} + \text{fis. mat} + \text{ing. mecc}\right)$$

- **non vedente dal 1771**

Il calcolo delle variazioni

L'incognita è una funzione/curva: ottimizzazione sulle curve

Leonhard Euler

1707-1783

- 800 pubblicazioni (+ corrispondenze)
- Tra il 1725 e il 1800, Eulero =

$$\frac{1}{3}\left(\text{mat} + \text{fis. mat} + \text{ing. mecc}\right)$$

- non vedente dal 1771
- una pubblicazione a settimana nel 1775

Il calcolo delle variazioni

L'incongnita è una funzione/curva: ottimizzazione sulle curve

Leonhard Euler

1707-1783

- 800 pubblicazioni (+ corrispondenze)
- Tra il 1725 e il 1800, Eulero =

$$\frac{1}{3}\left(\text{mat} + \text{fis. mat} + \text{ing. mecc}\right)$$

- non vedente dal 1771
- una pubblicazione a settimana nel 1775
- 13 figli (solo 5 sopravvissero)

Tre equazioni nella carriera di Eulero

Tre equazioni nella carriera di Eulero

A) $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \ldots + 1/K^2 + \ldots \ = \boxed{?}$

Tre equazioni nella carriera di Eulero

A) $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \ldots + 1/K^2 + \ldots = \pi^2/6$

Tre equazioni nella carriera di Eulero

A) $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots + 1/K^2 + \dots = \pi^2/6$

B) $e^{\pi i} = -1$

Tre equazioni nella carriera di Eulero

A) $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \ldots + 1/k^2 + \ldots = \pi^2/6$

B) $e^{\pi i} = -1$

C) Equazione di Eulero in ottimizzazione sulle curve

Tre equazioni nella carriera di Eulero

A) $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \ldots + 1/k^2 + \ldots = \pi^2/6$

B) $e^{\pi i} = -1$

C) Equazione di Eulero in $\underbrace{\text{ottimizzazione sulle curve}}_{}$

= calcolo delle variazioni

Eulero

- **un grande uomo, un genio, generoso e modesto**

Eulero

- **un grande uomo, un genio, generoso e modesto**
- ***Euler è stato il primo a citare gli altri con apprezzamento*** **(Truesdell)**

Eulero

- un grande uomo, un genio, generoso e modesto
- *Euler è stato il primo a citare gli altri con apprezzamento* (Truesdell)

Eulero

Muore nel Settembre 1783 a San-Pietroburgo all'età di 76 anni

R.
I.
P.

- un grande uomo, un genio, generoso e modesto
- *Euler è stato il primo a citare gli altri con apprezzamento* (Truesdell)

Eulero

Muore nel Settembre 1783 a San-Pietroburgo all'età di 76 anni

R.
I.
P.

L'ultimo giorno :

- un grande uomo, un genio, generoso e modesto
- *Euler è stato il primo a citare gli altri con apprezzamento* (Truesdell)

Eulero

Muore nel Settembre 1783 a San-Pietroburgo all'età di 76 anni

R.
I.
P.

L'ultimo giorno :

- mattina : modello di mongolfiera (di recente invenzione)

- un grande uomo, un genio, generoso e modesto
- *Euler è stato il primo a citare gli altri con apprezzamento* (Truesdell)

Eulero

Muore nel Settembre 1783 a San-Pietroburgo all'età di 76 anni

R.
I.
P.

L'ultimo giorno :

- mattina : modello di mongolfiera (di recente invenzione)
- pomeriggio : calcolo delle orbite di Urano (scoperto di recente)

- un grande uomo, un genio, generoso e modesto
- *Euler è stato il primo a citare gli altri con apprezzamento* (Truesdell)

Eulero

Muore nel Settembre 1783 a San-Pietroburgo all'età di 76 anni

R.
I.
P.

L'ultimo giorno :

- mattina : modello di mongolfiera (di recente invenzione)
- pomeriggio : calcolo delle orbite di Urano (scoperto di recente)
- sera : infarto, morte improvvisa

- un grande uomo, un genio, generoso e modesto
- *Euler è stato il primo a citare gli altri con apprezzamento* (Truesdell)

Eulero

Muore nel Settembre 1783 a San-Pietroburgo all'età di 76 anni

R. I. P.

L'ultimo giorno :

- mattina : modello di mongolfiera (di recente invenzione)
- pomeriggio : calcolo delle orbite di Urano (scoperto di recente)
- sera : infarto, morte improvvisa

Le sue ultime parole :

- **un grande uomo, un genio, generoso e modesto**
- ***Euler è stato il primo a citare gli altri con apprezzamento*** (Truesdell)

Eulero

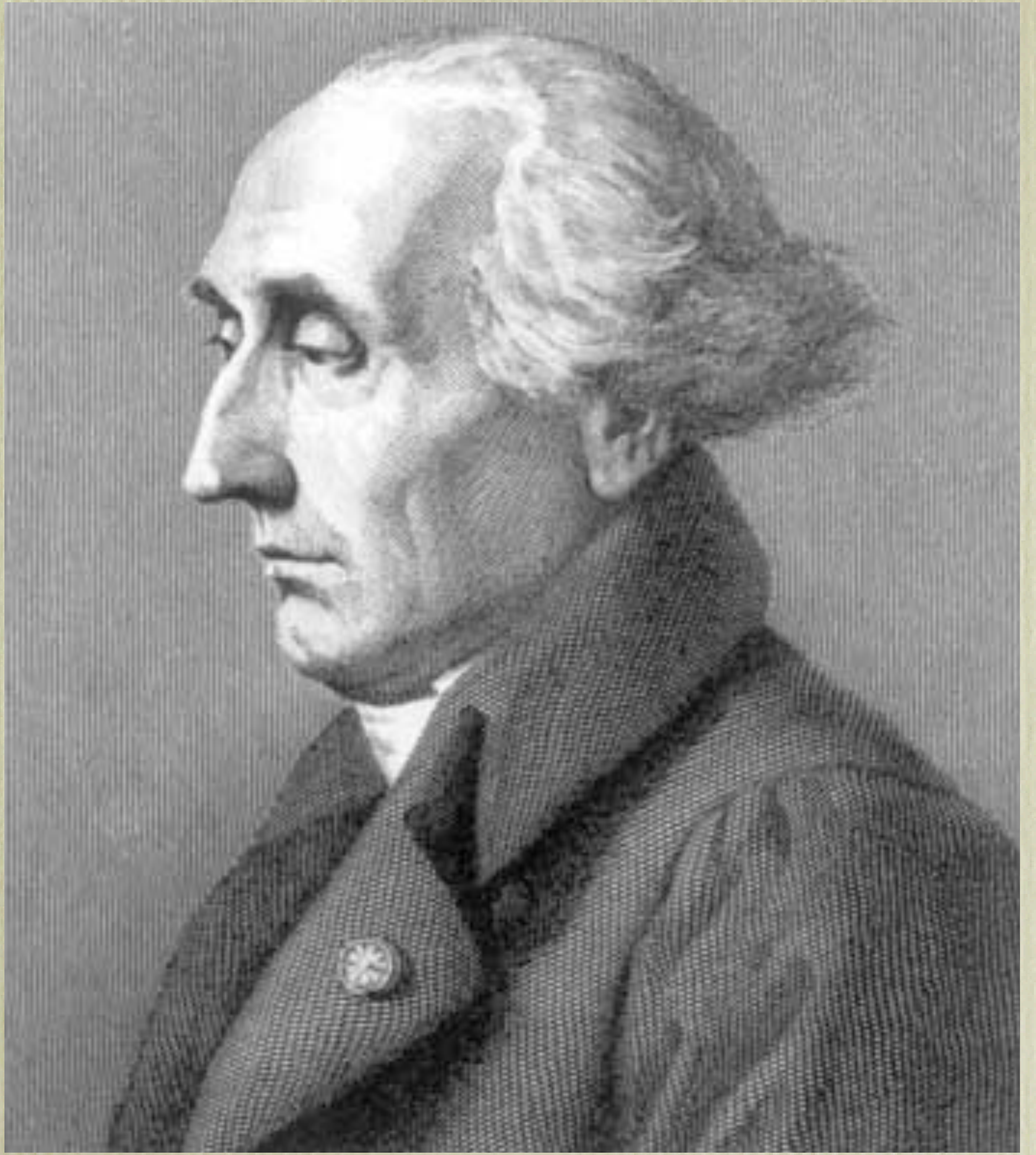
Muore nel Settembre 1783 a San-Pietroburgo all'età di 76 anni

R. I. P.

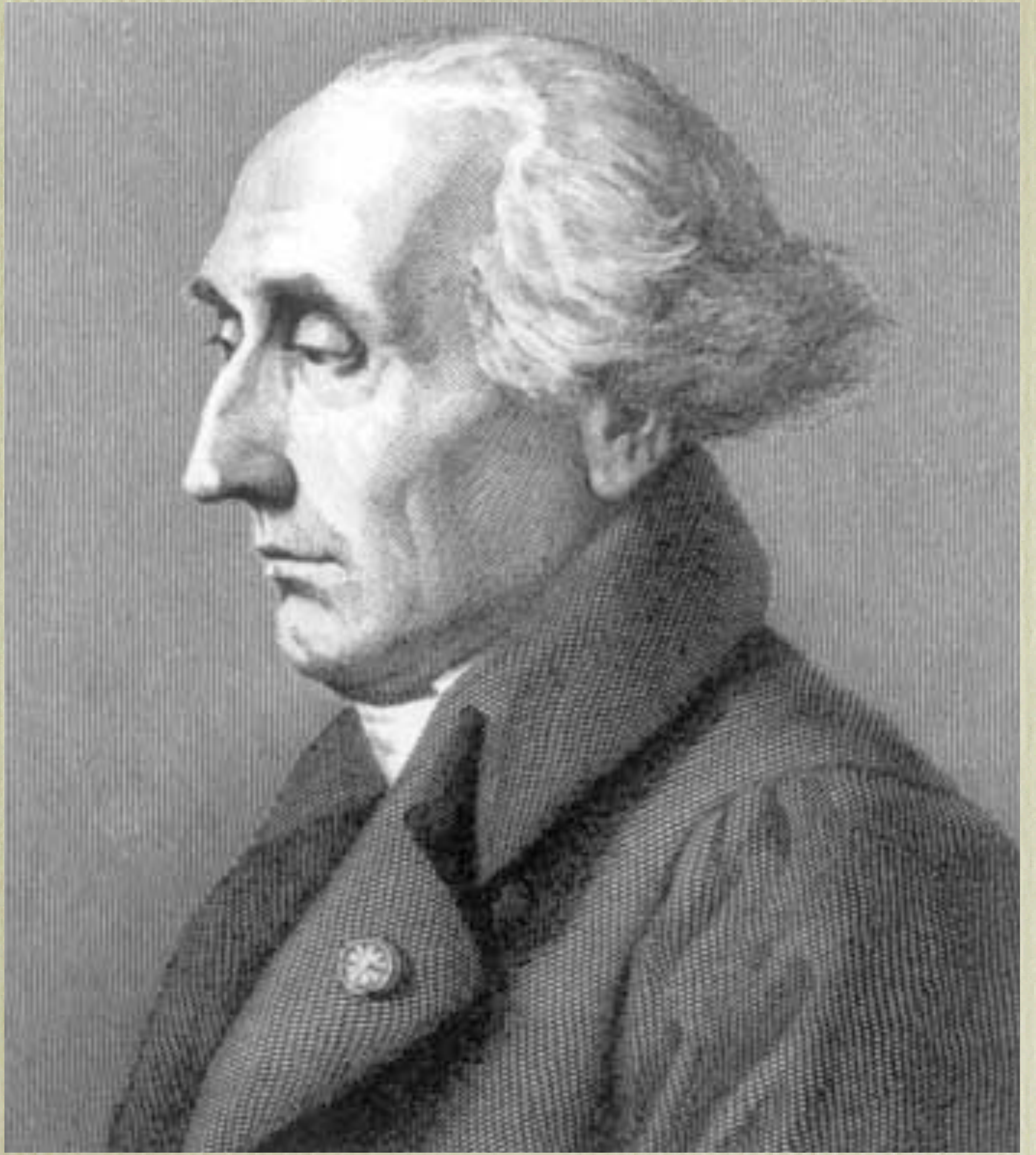
L'ultimo giorno :

- **mattina : modello di mongolfiera (di recente invenzione)**
- **pomeriggio : calcolo delle orbite di Urano (scoperto di recente)**
- **sera : infarto, morte improvvisa**

Le sue ultime parole : Muoio

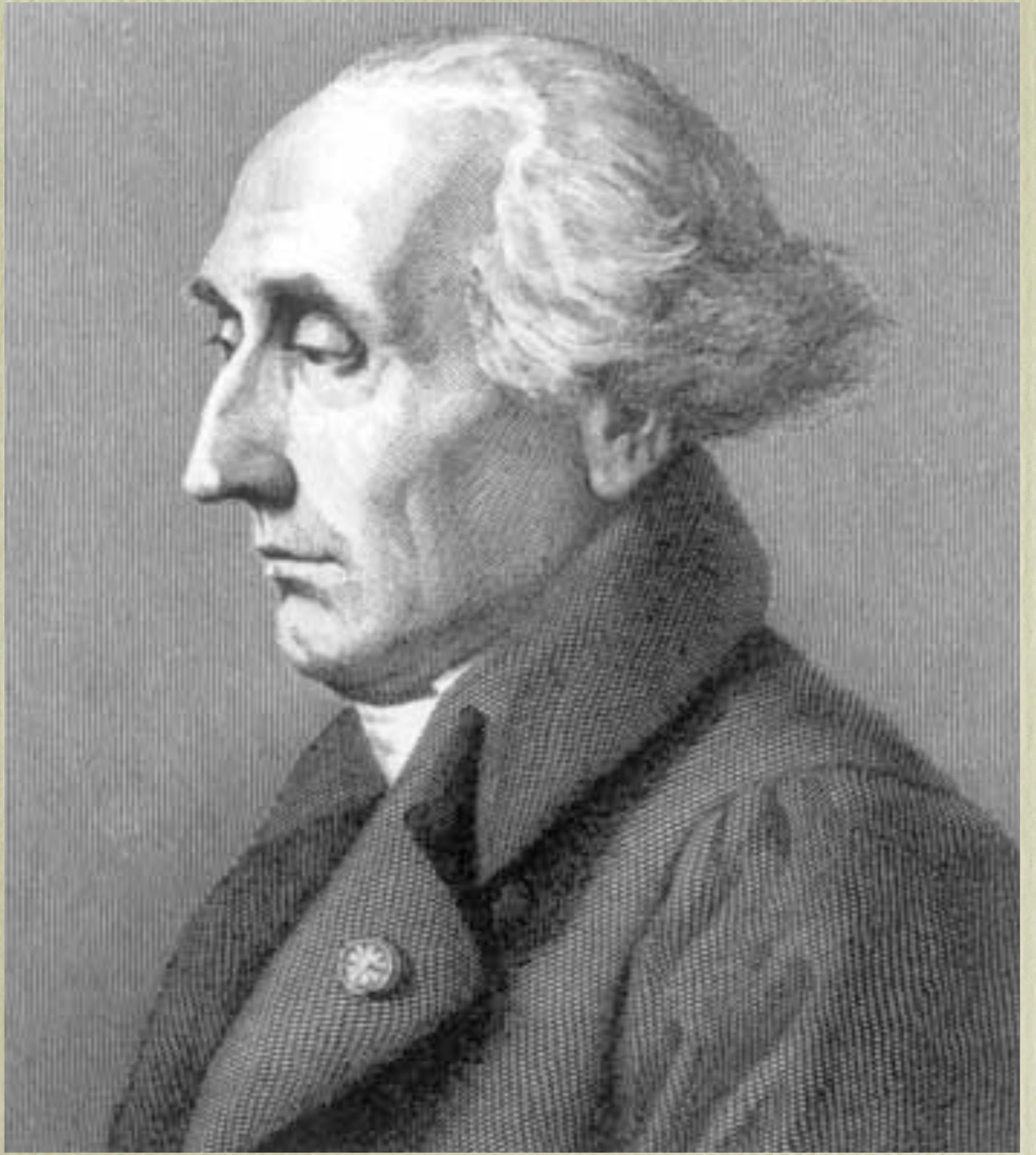


Joseph Louis
Lagrange



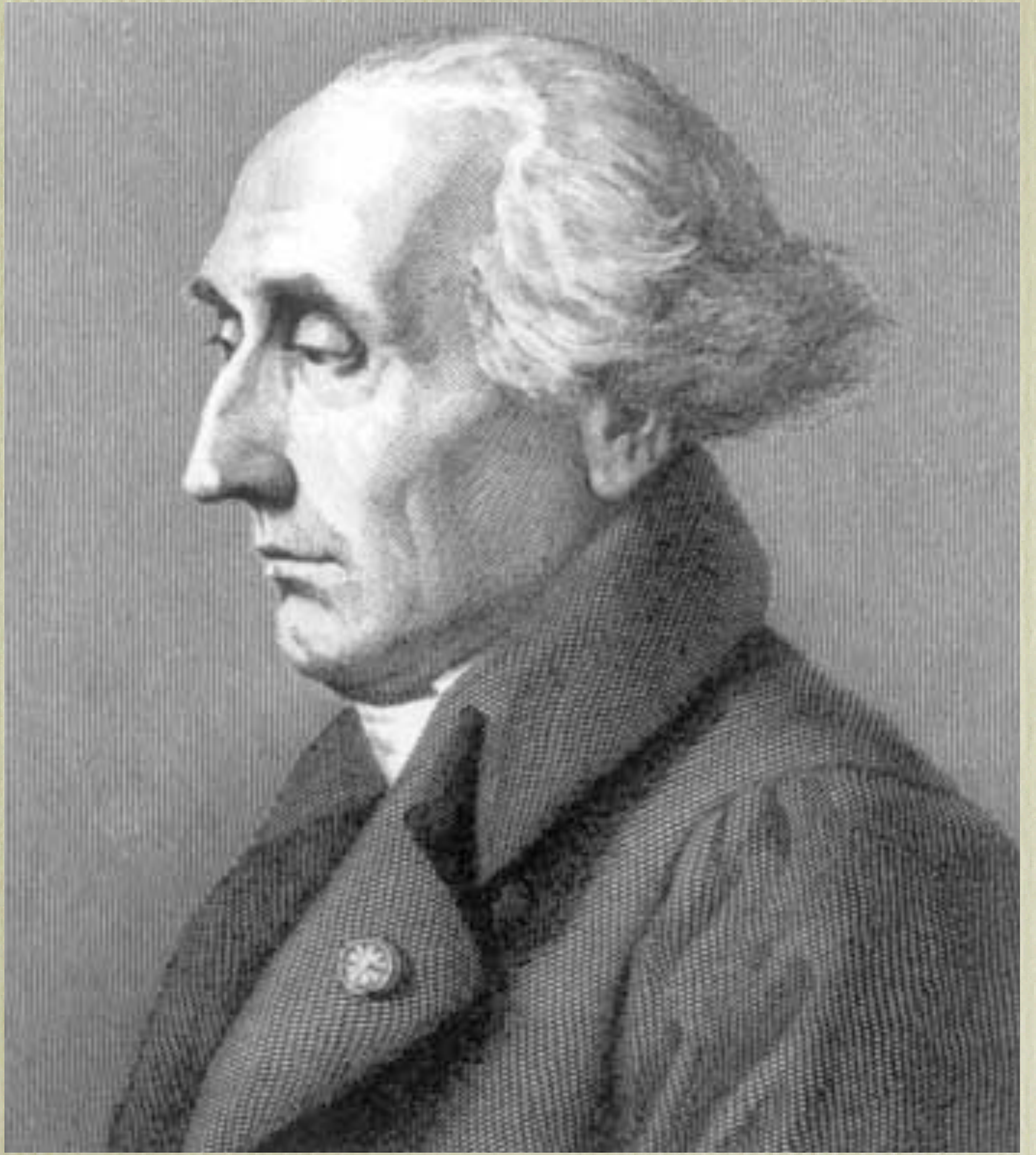
Joseph Louis Lagrange

Nasce a Torino nel 1736



Joseph Louis Lagrange

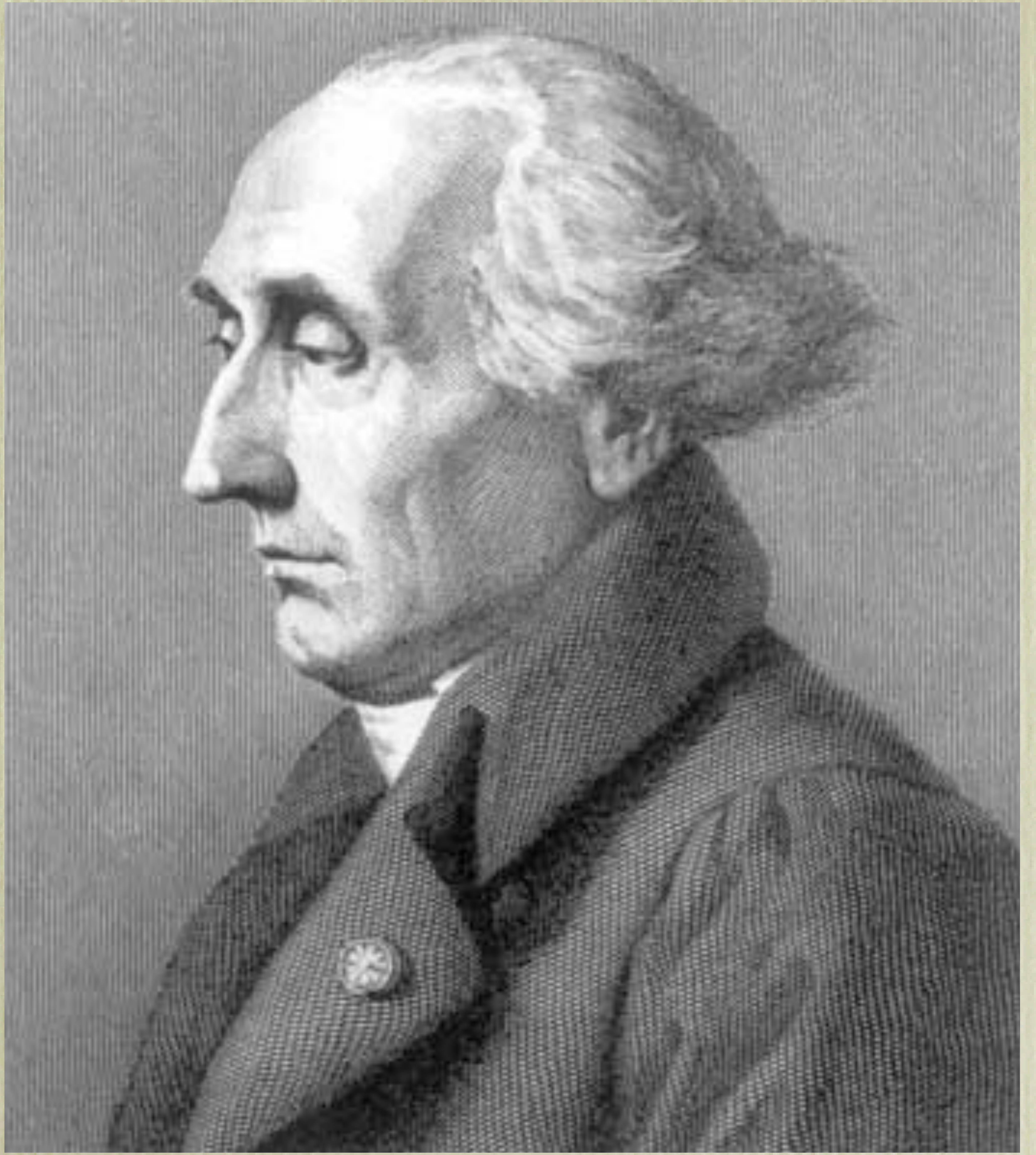
Nasce a Torino nel 1736



Joseph Louis Lagrange

Nasce a Torino nel 1736

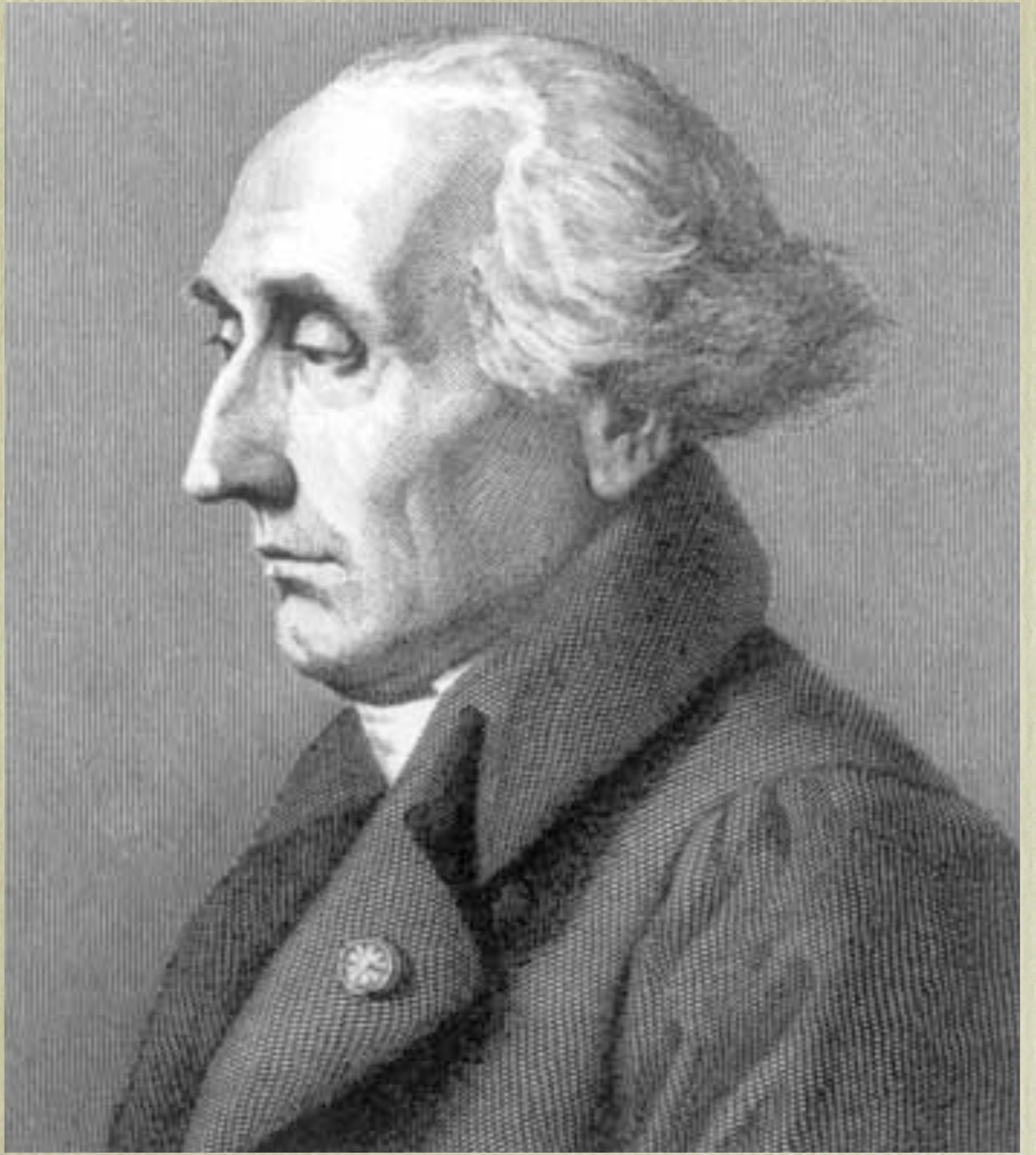
- **Scrive ad Eulero nel 1755, descrivendo il metodo delle *variazioni***



Joseph Louis Lagrange

Nasce a Torino nel 1736

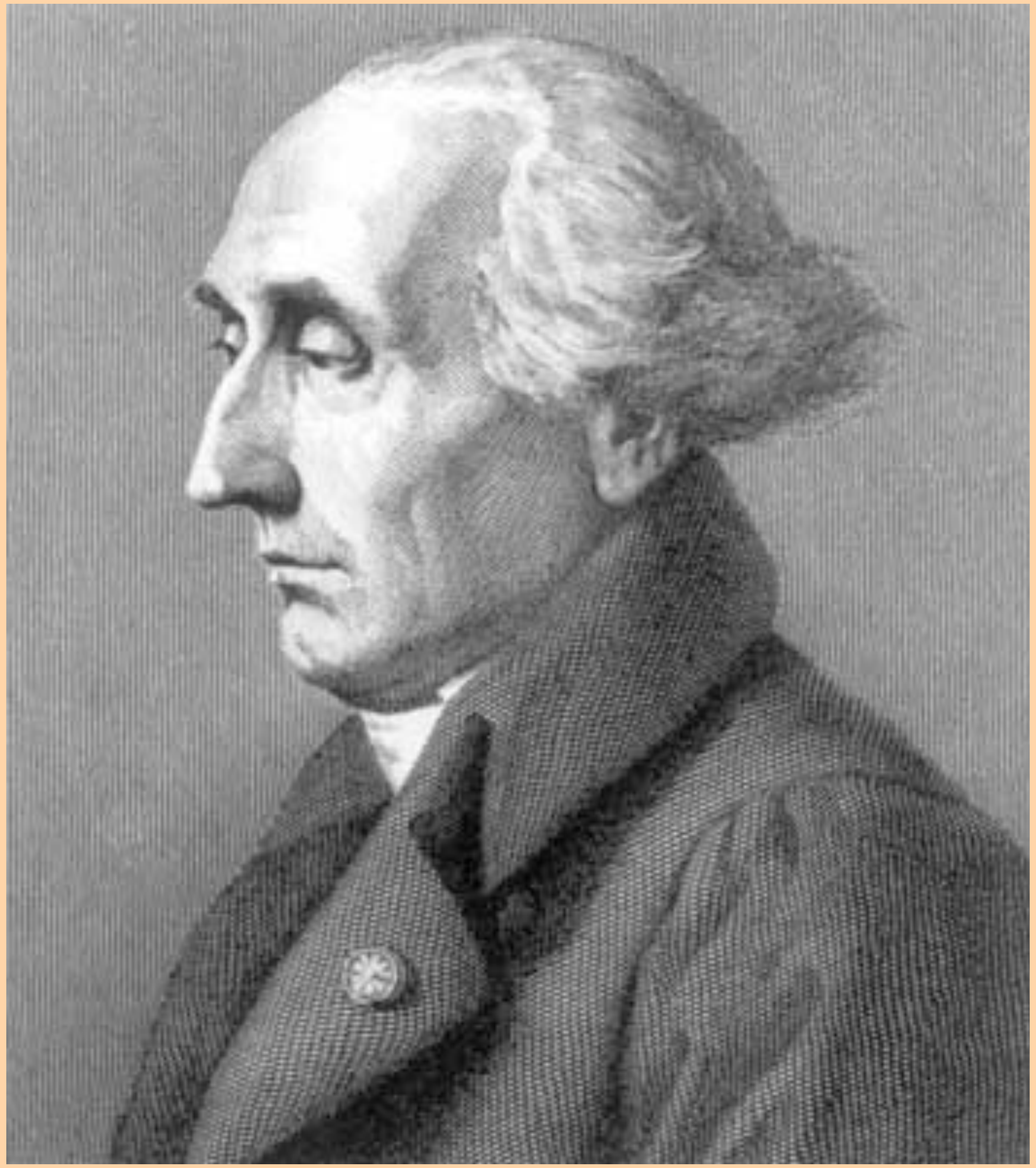
- **Scrive ad Eulero nel 1755, descrivendo il metodo delle *variazioni***



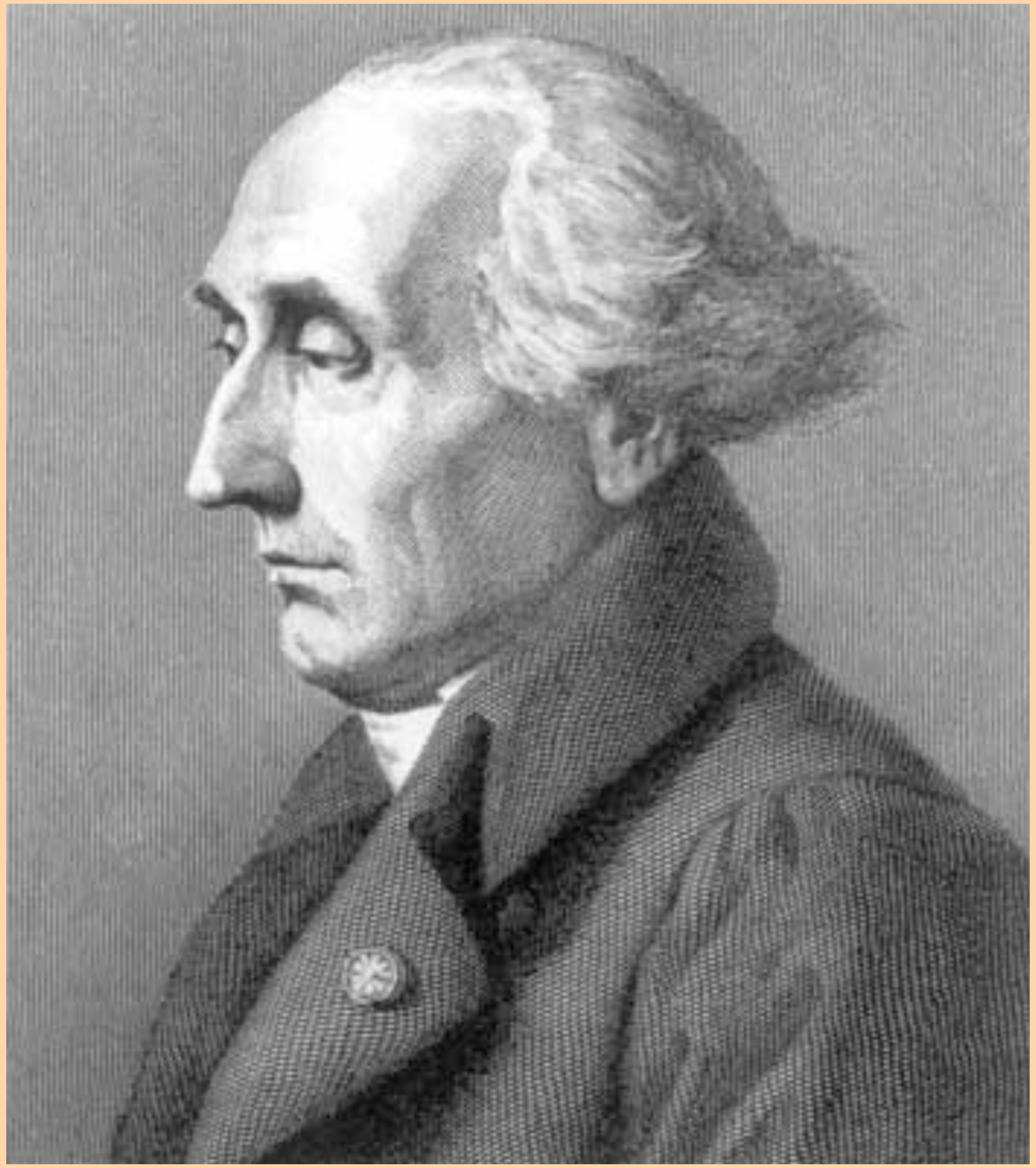
Joseph Louis Lagrange

Nasce a Torino nel 1736

- **Scrive ad Eulero nel 1755, descrivendo il metodo delle *variazioni***
- **Eulero chiama l’argomento in suo onore: C*alcolo delle Variazioni***

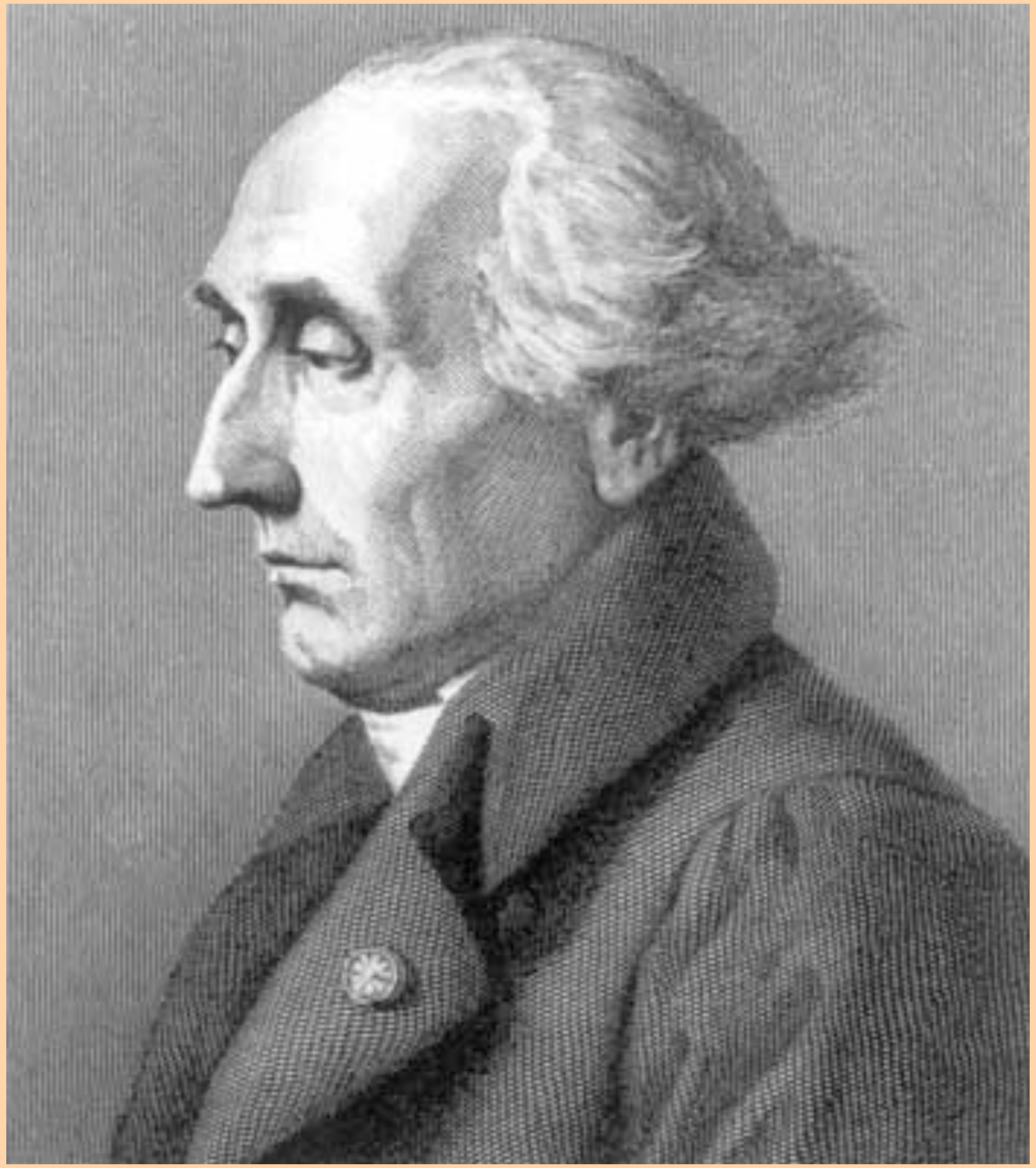


Lagrange



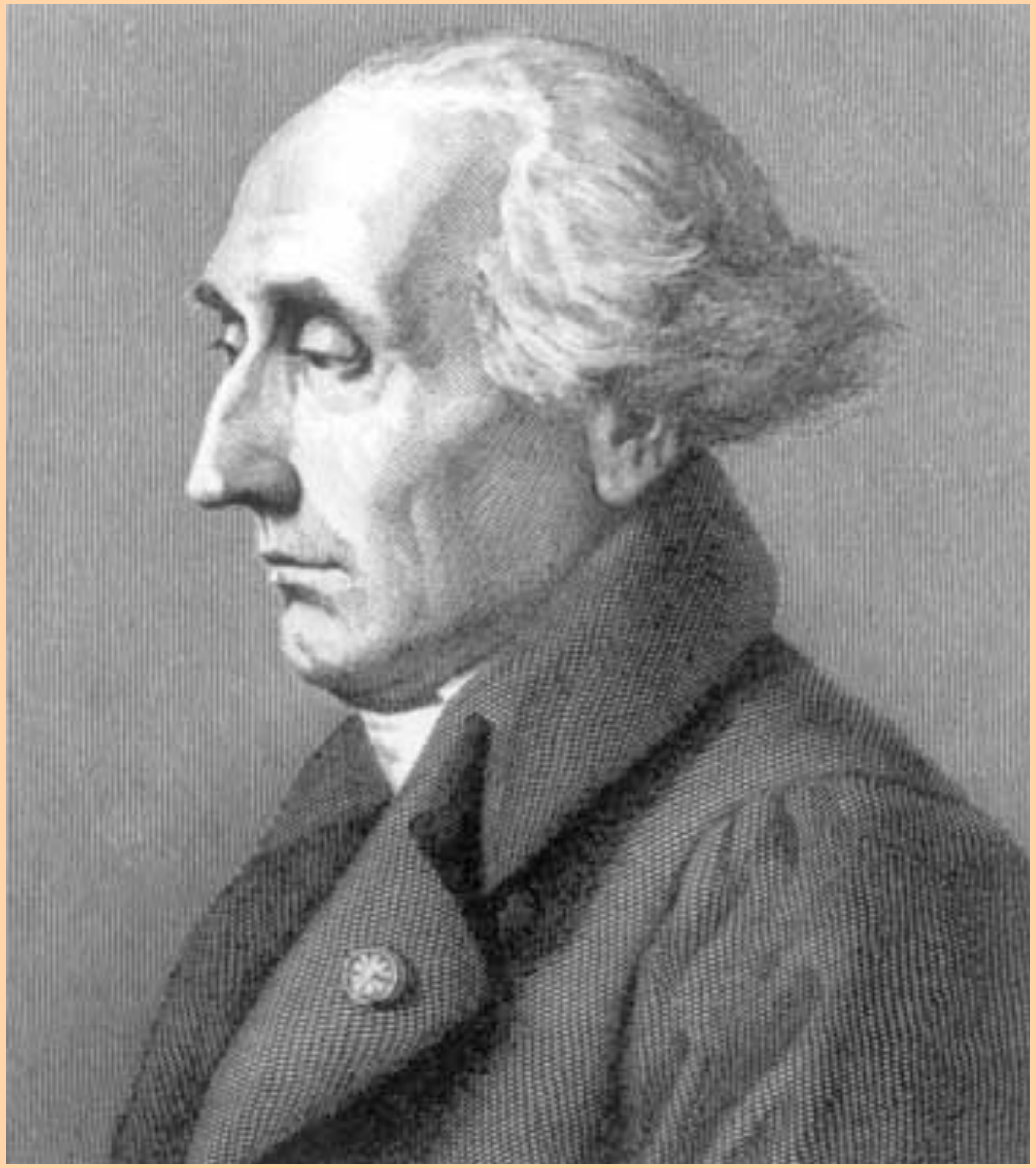
Lagrange

- **Dopo 20 anni a Berlino, diventa Accademico a Parigi nel 1786**



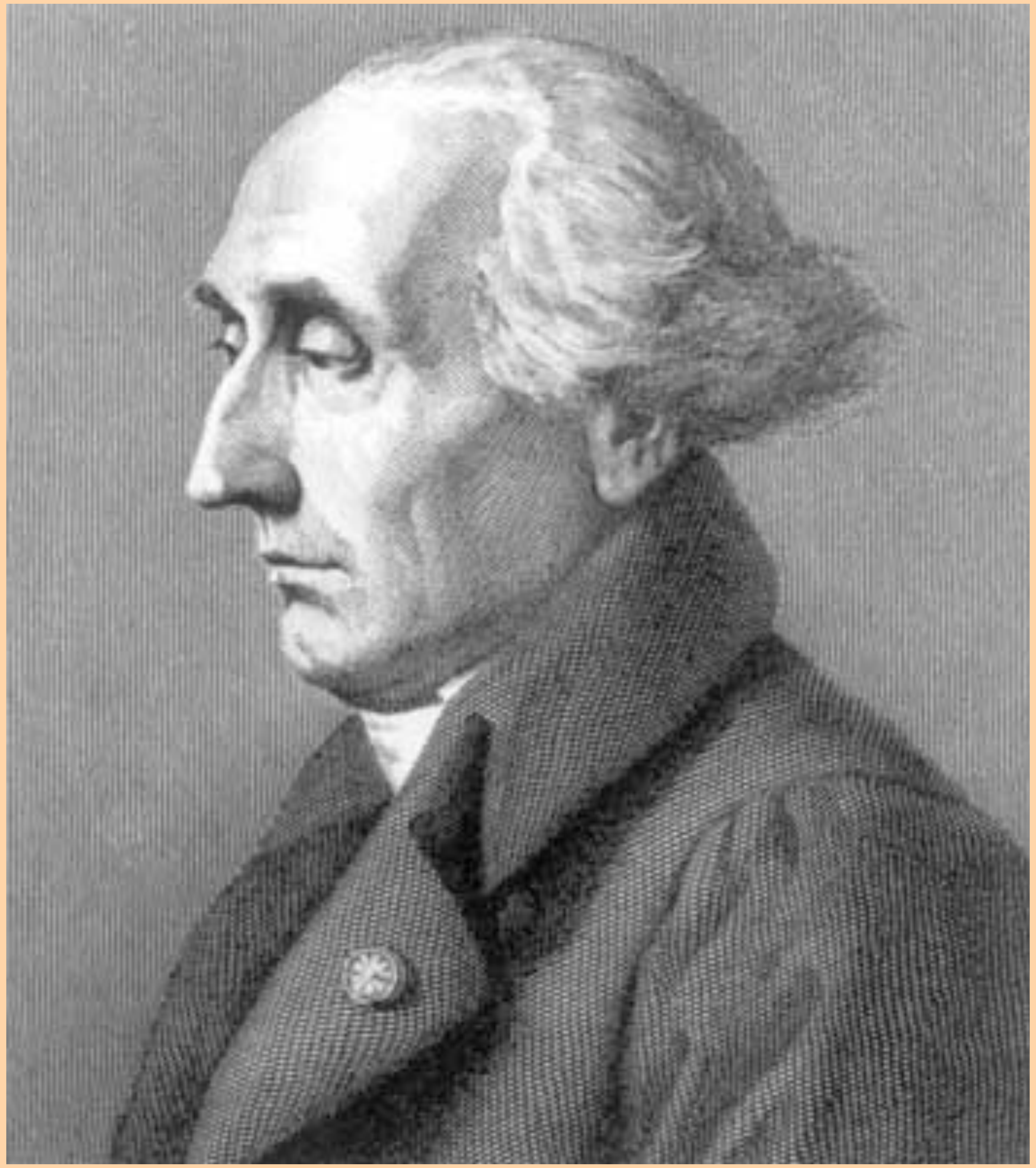
Lagrange

- Dopo 20 anni a Berlino, diventa Accademico a Parigi nel 1786
- Durante la rivoluzione: sistema metrico, Ecole Normale e Polytechnique



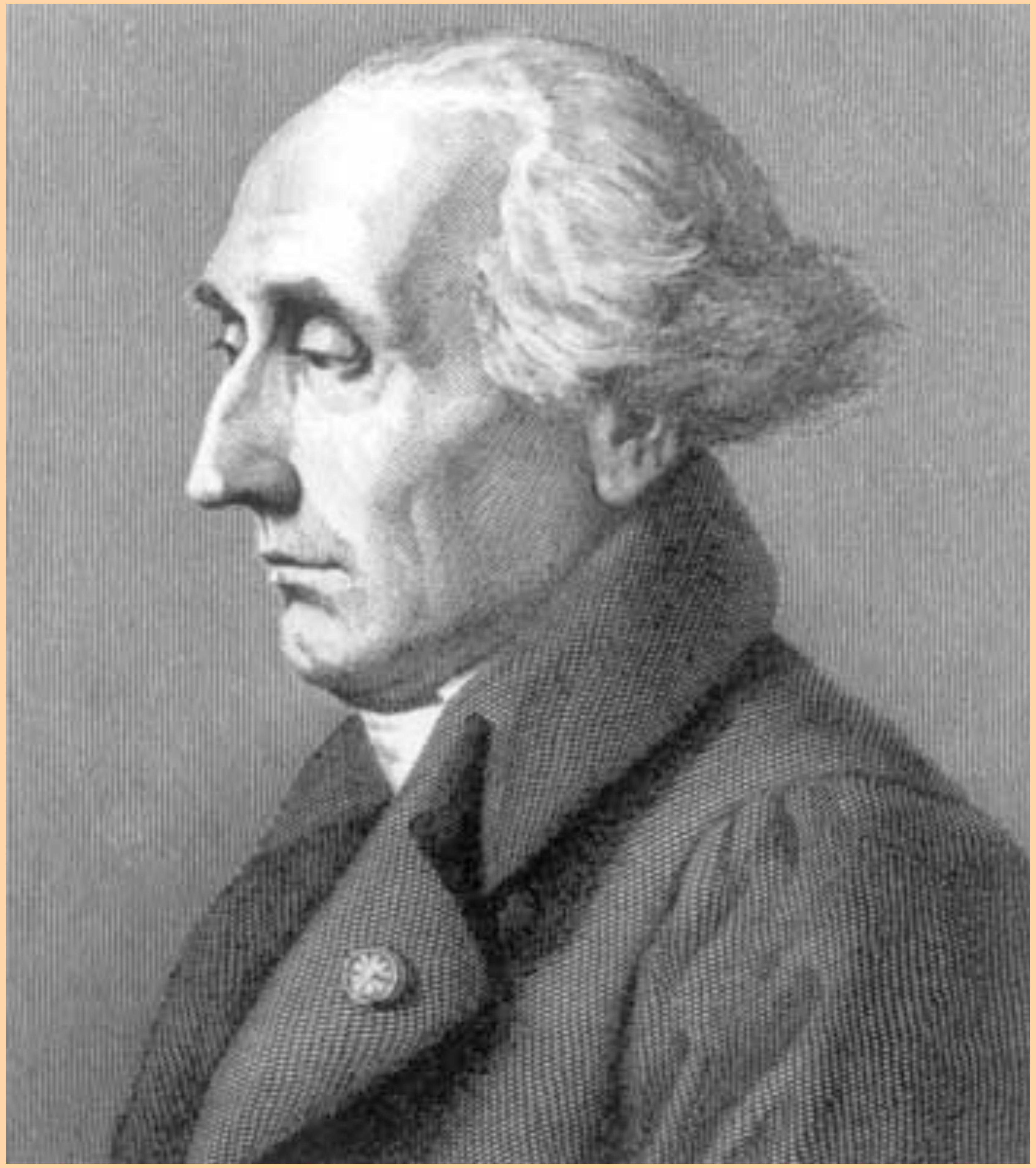
Lagrange

- Dopo 20 anni a Berlino, diventa Accademico a Parigi nel 1786
- Durante la rivoluzione: sistema metrico, Ecole Normale e Polytechnique
- Sotto Napoleone : senatore, Légion d'honneur



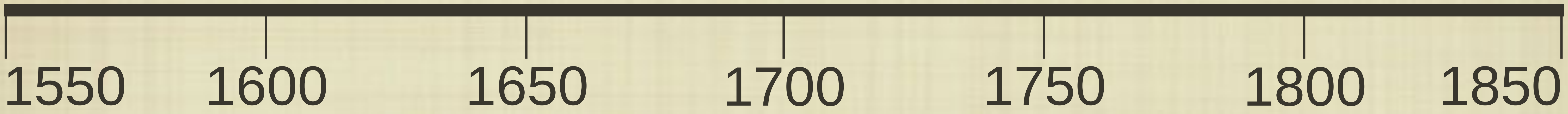
Lagrange

- **Dopo 20 anni a Berlino, diventa Accademico a Parigi nel 1786**
- **Durante la rivoluzione: sistema metrico, Ecole Normale e Polytechnique**
- **Sotto Napoleone : senatore, Légion d'honneur**
- **Il suo 'più grande tesoro' : la sua giovane moglie, che sposa a 56 anni**

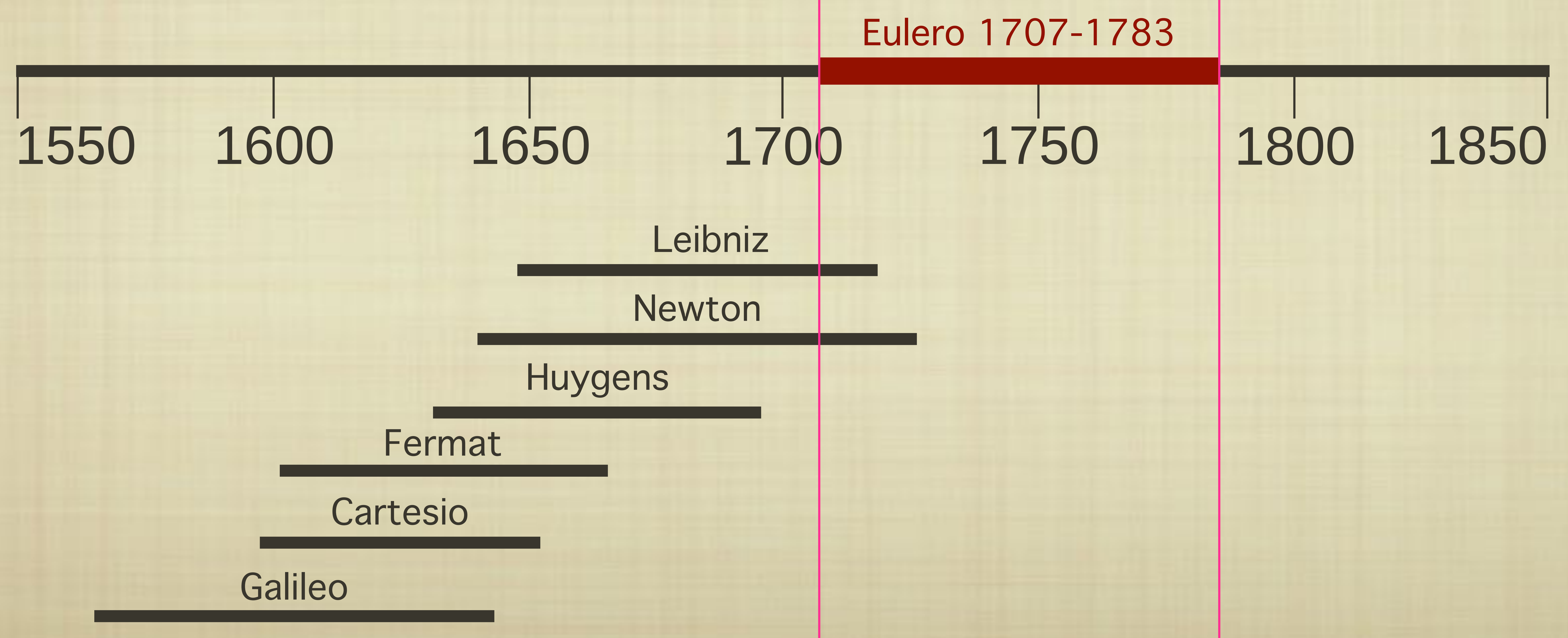


Lagrange

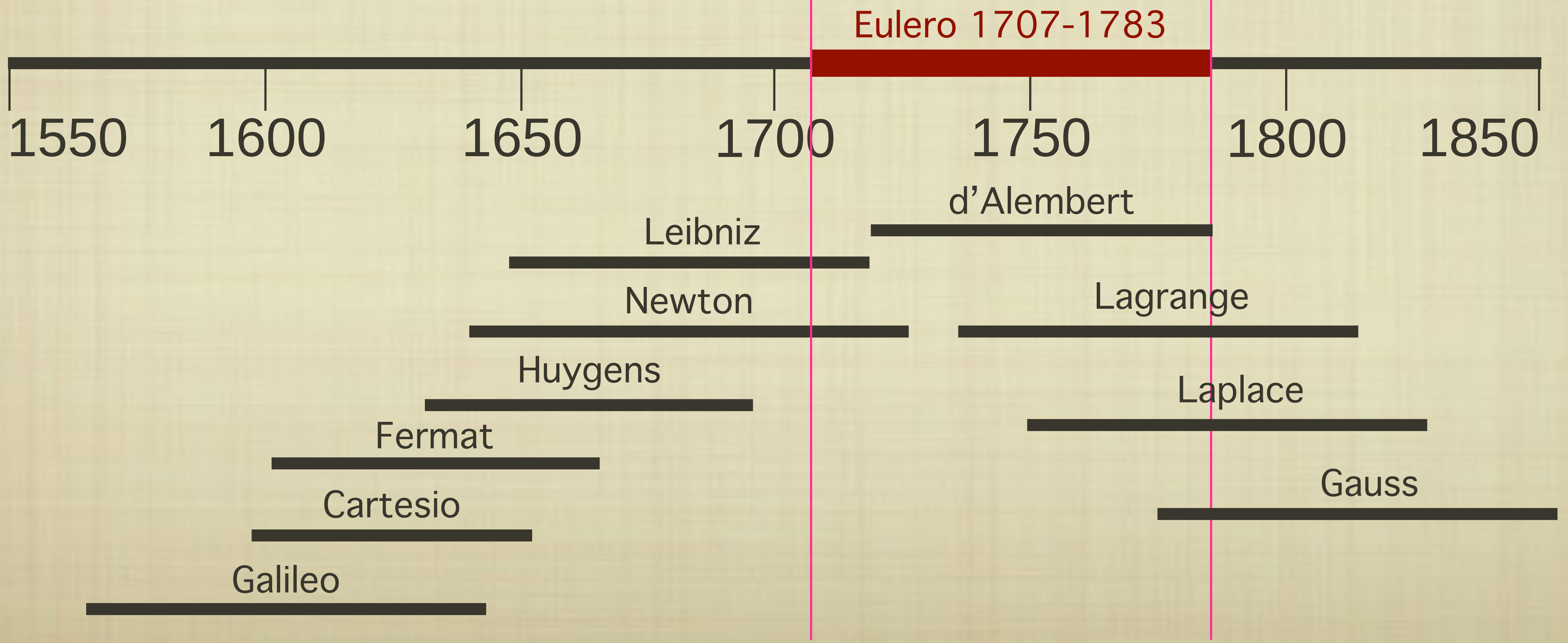
- Dopo 20 anni a Berlino, diventa Accademico a Parigi nel 1786
- Durante la rivoluzione: sistema metrico, Ecole Normale e Polytechnique
- Sotto Napoleone : senatore, Légion d'honneur
- Il suo 'più grande tesoro' : la sua giovane moglie, che sposa a 56 anni
- Muore a Parigi nel 1813 all'età di 77 anni

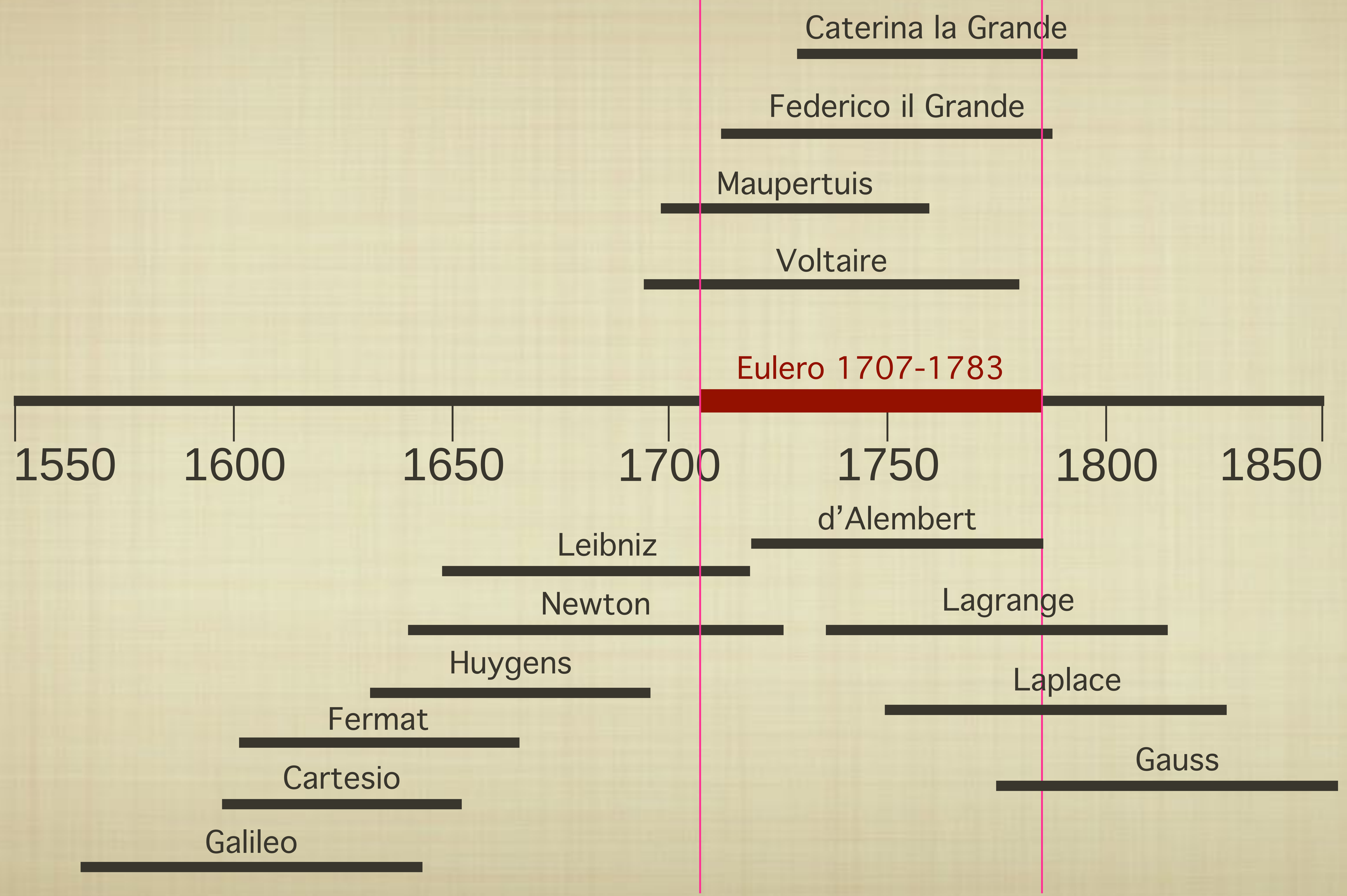

1550
1600
1650
1700
1750
1800
1850


Eulero 1707-1783
1550
1600
1650
1700
1750
1800
1850



Eulero 1707-1783
1550
1600
1650
1700
1750
1800
1850
Leibniz
Newton
Huygens
Fermat
Cartesio
Galileo


Eulero 1707-1783
1550
1600
1650
1700
1750
1800
1850
d'Alembert
Leibniz
Newton
Lagrange
Huygens
Laplace
Fermat
Gauss
Cartesio
Galileo

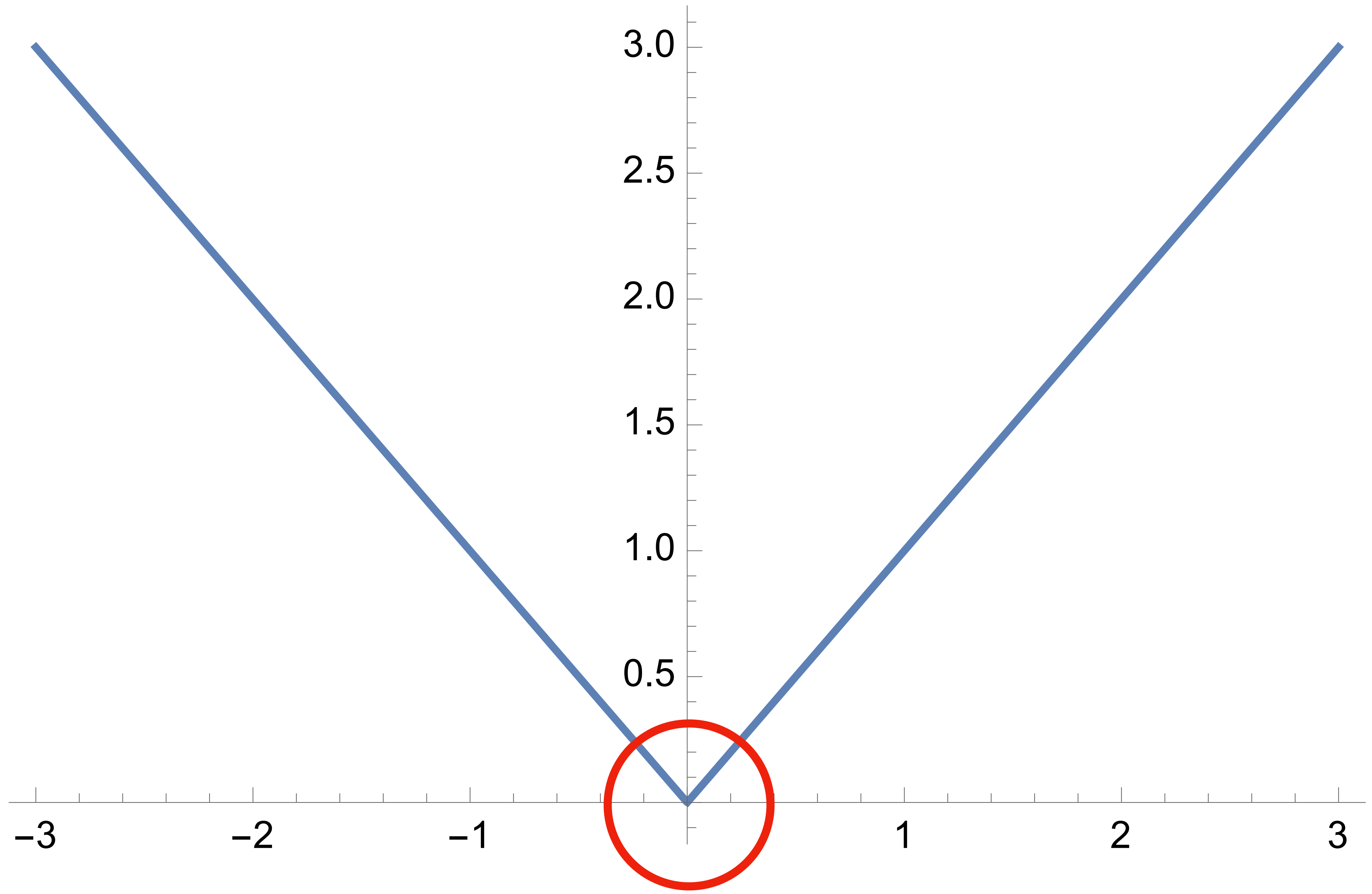

Caterina la Grande
Federico il Grande
Maupertuis
Voltaire
Eulero 1707-1783
1550
1600
1650
1700
1750
1800
1850
d'Alembert
Leibniz
Newton
Lagrange
Huygens
Laplace
Fermat
Gauss
Cartesio
Galileo

I problemi nel calcolo delle variazioni

le soluzioni non sono sempre “lisce”

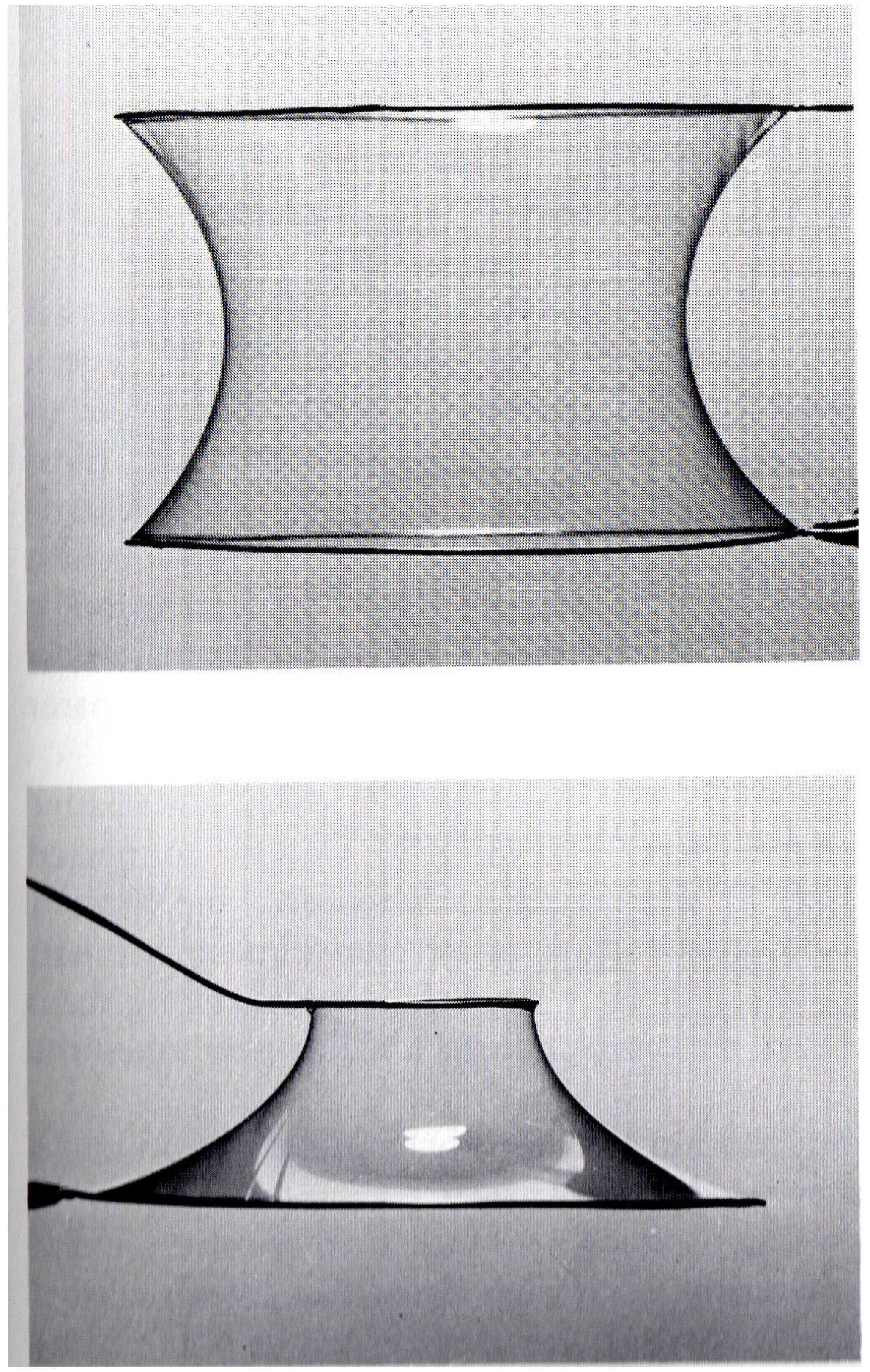
I problemi nel calcolo delle variazioni

le soluzioni non sono sempre “lisce”

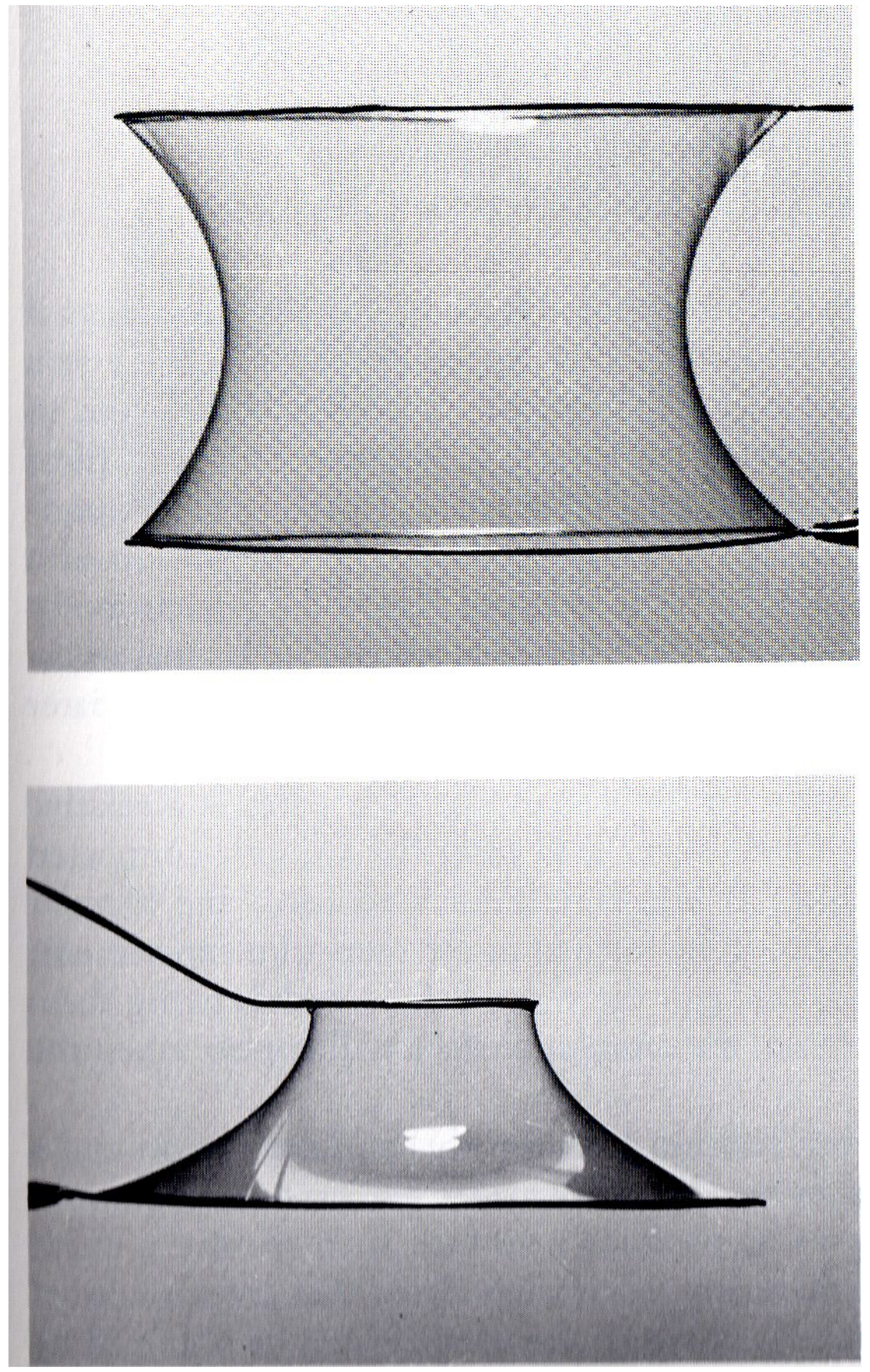


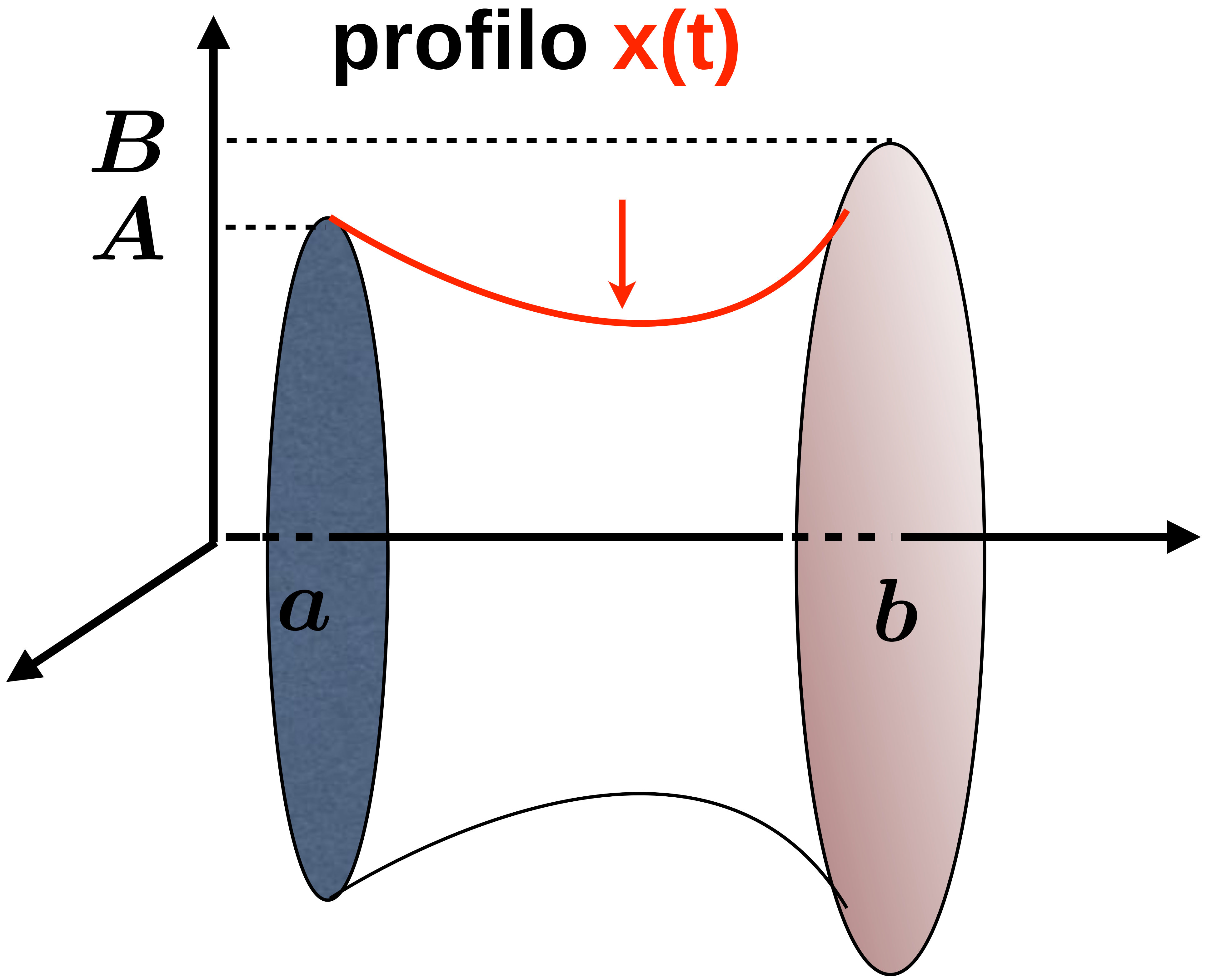
Esempio (Eulero): superficie di rotazione di area minima

Esempio (Eulero): superficie di rotazione di area minima

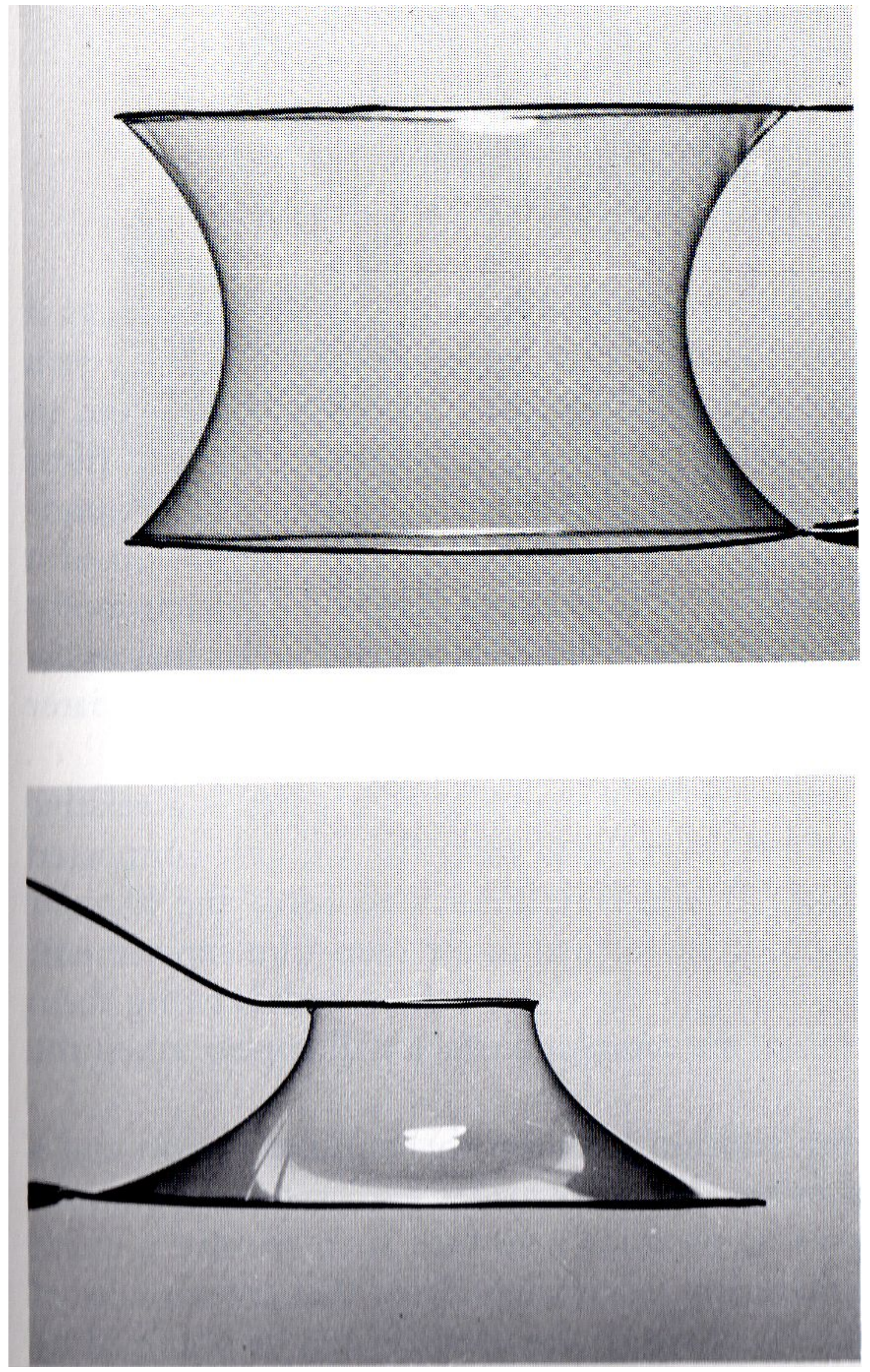


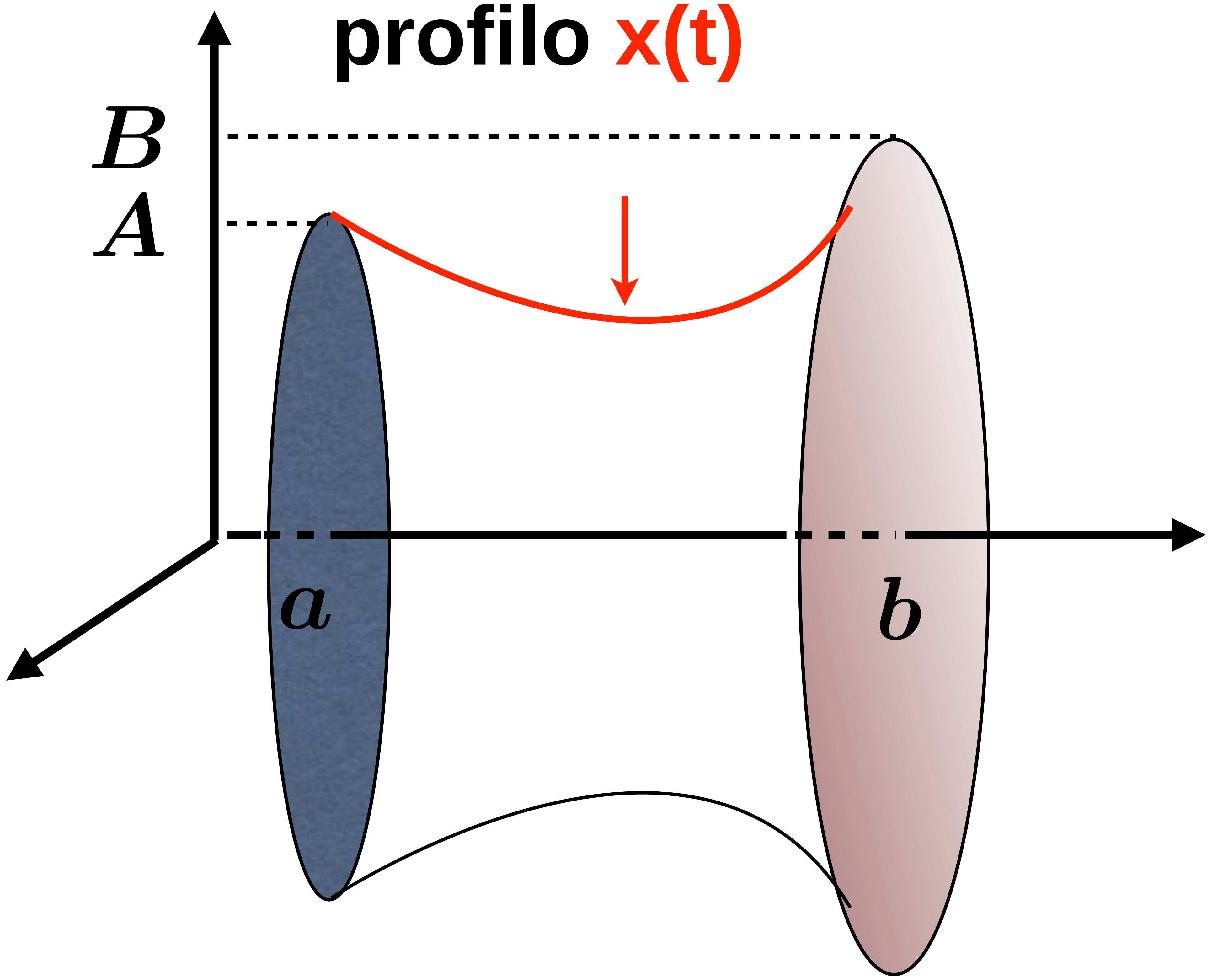
Esempio (Eulero): superficie di rotazione di area minima





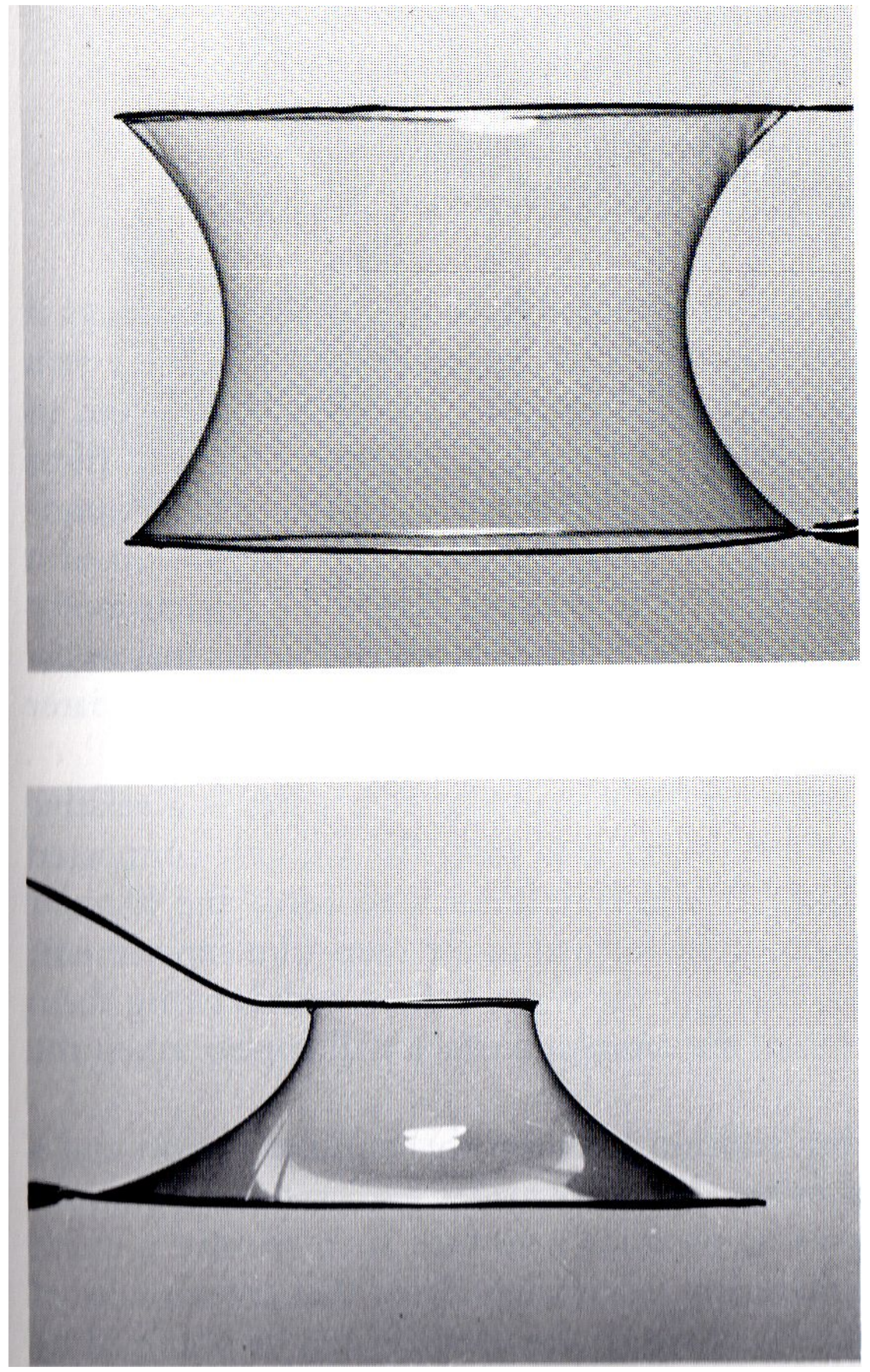
Esempio (Eulero): superficie di rotazione di area minima

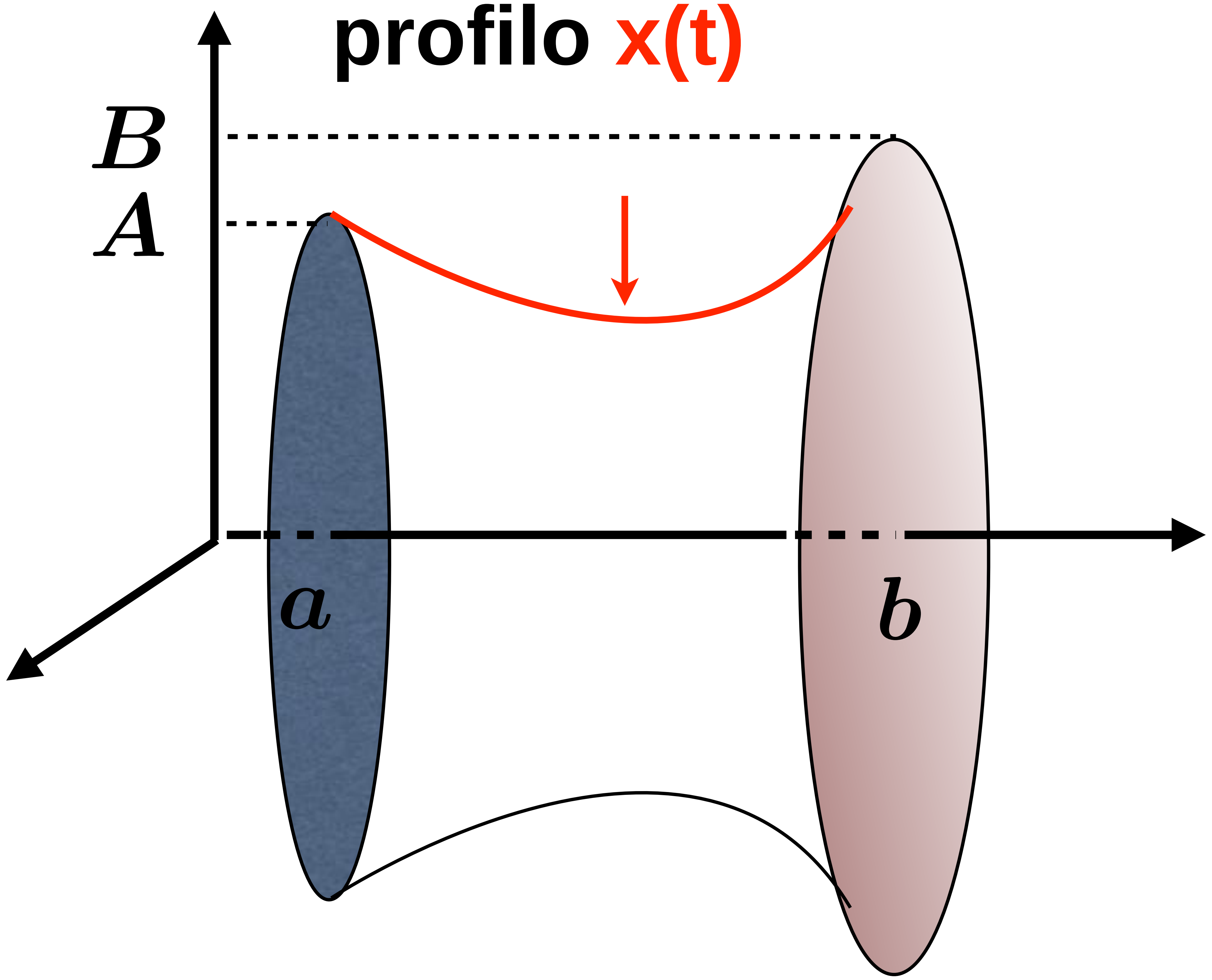




Trovare la funzione *x* che genera una superficie di area minima

Esempio (Eulero): superficie di rotazione di area minima

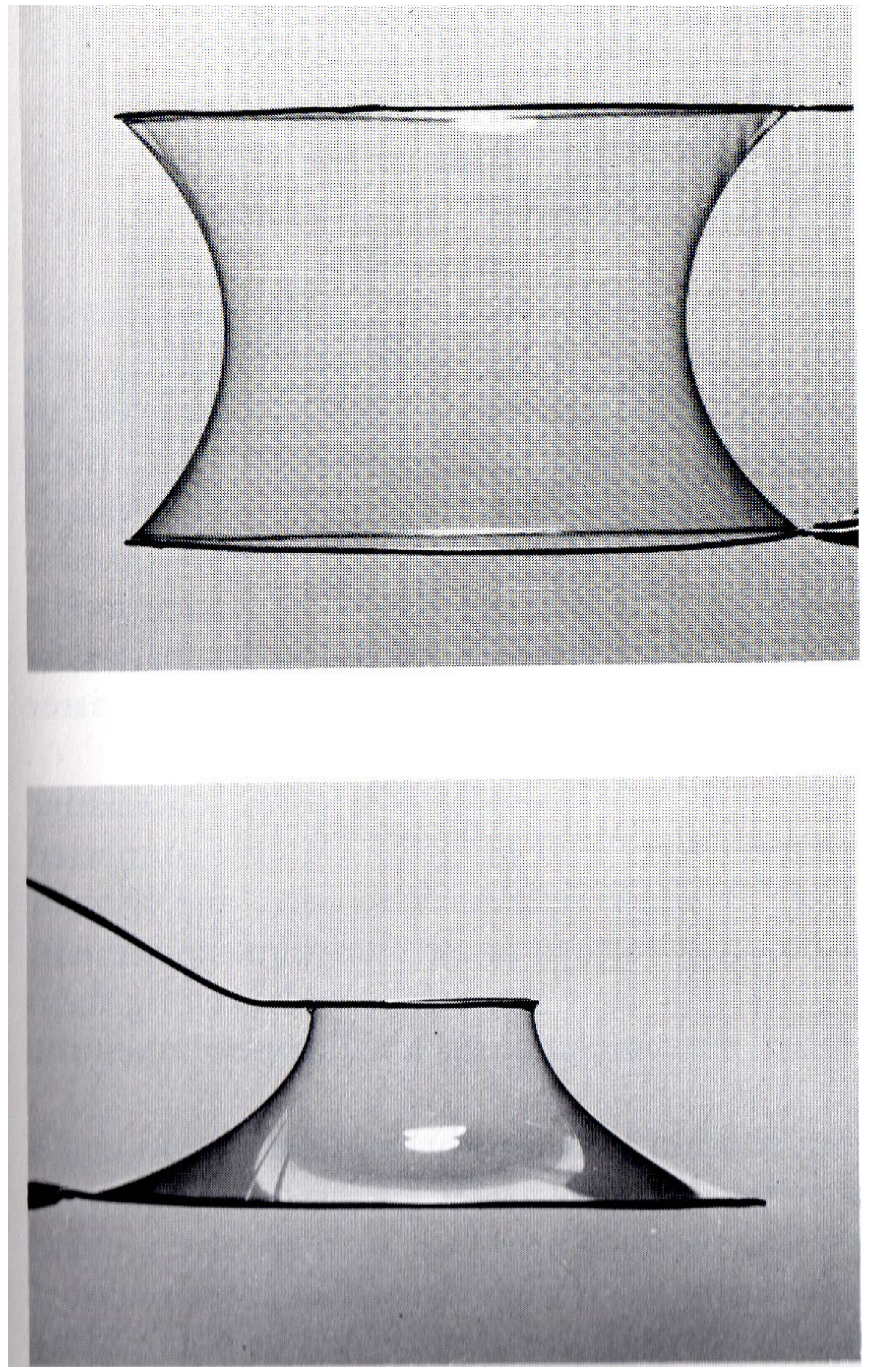


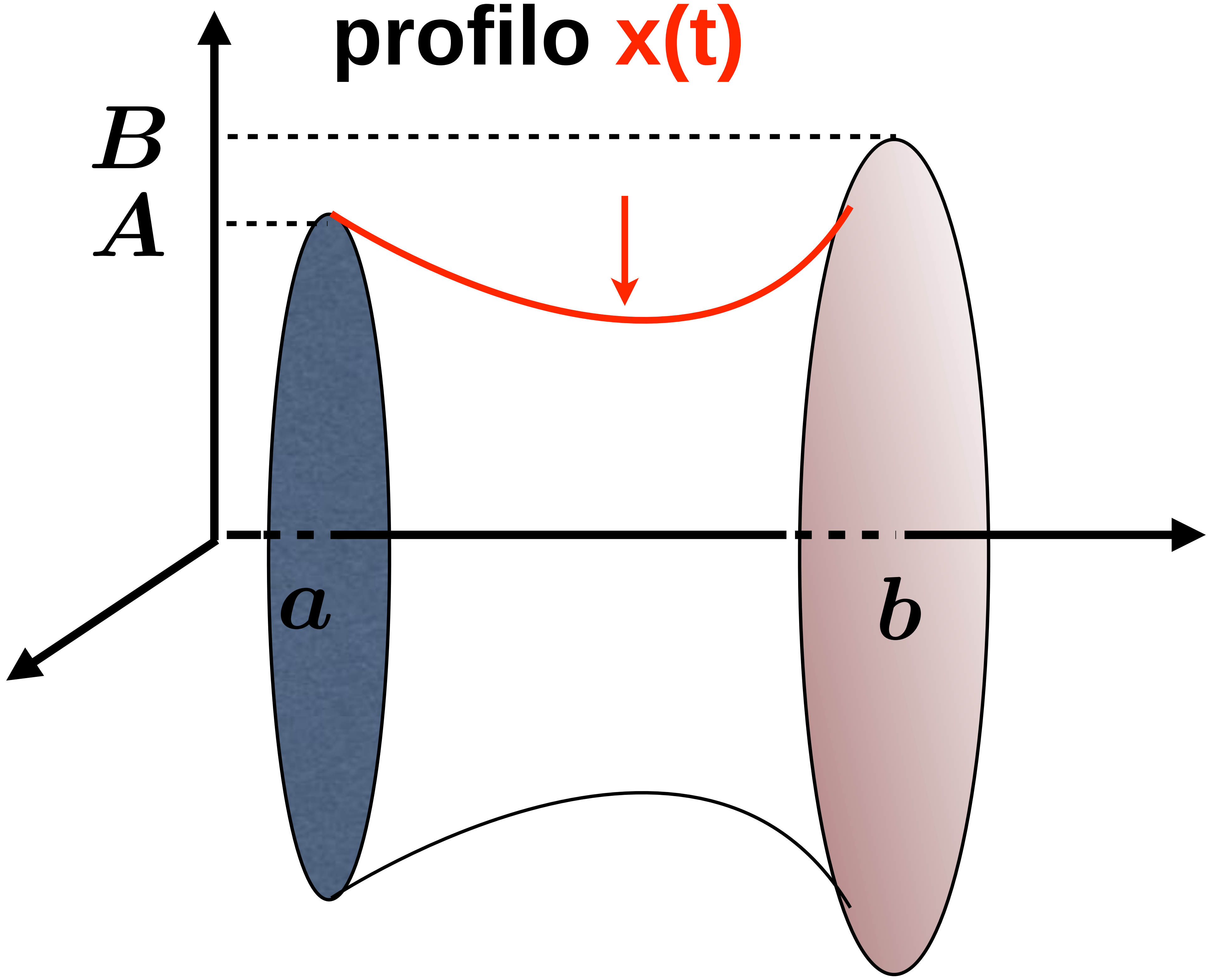


Trovare la funzione *x* che genera una superficie di area minima

$$\min_{x(\cdot)} \int_a^b x(t)\sqrt{1+x'(t)^2}\,dt$$

Esempio (Eulero): superficie di rotazione di area minima





Trovare la funzione x che genera una superficie di area minima

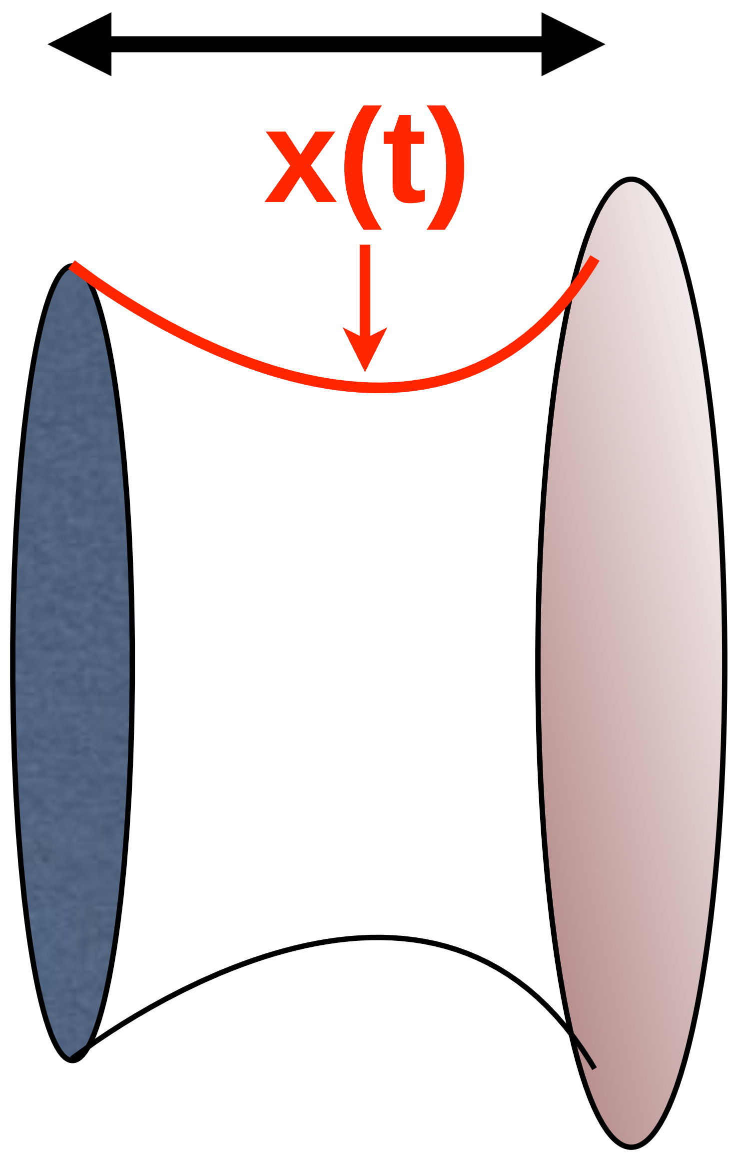
$$\min_{x(\cdot)} \int_a^b x(t)\sqrt{1+x'(t)^2}\,dt \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left\{\frac{x'(t)x(t)}{\sqrt{1+x'(t)^2}}\right\} = \sqrt{1+x'(t)^2}$$

Problema del CdV

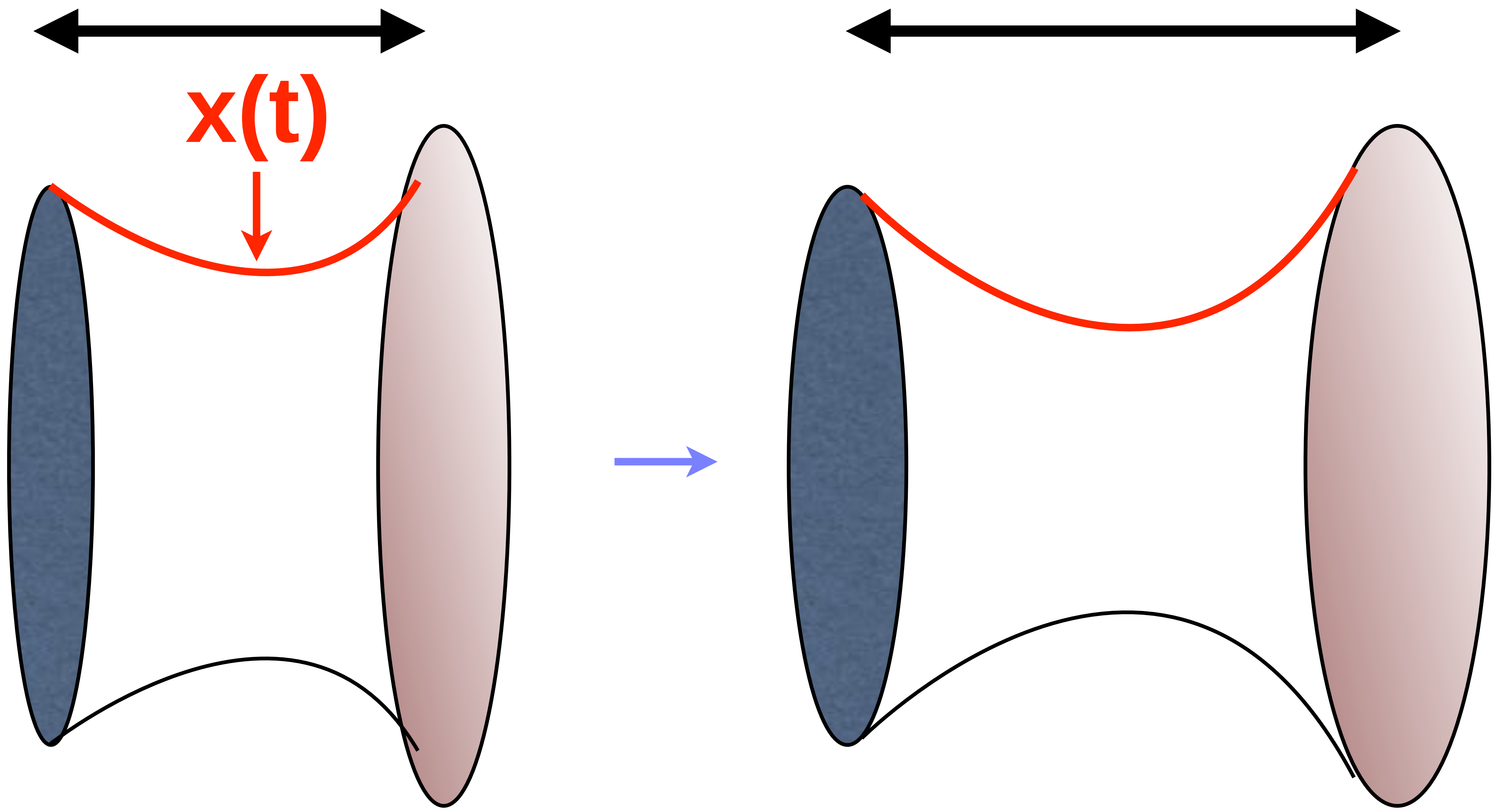
Equazione di Eulero-Lagrange

Cosa intendiamo con soluzione?

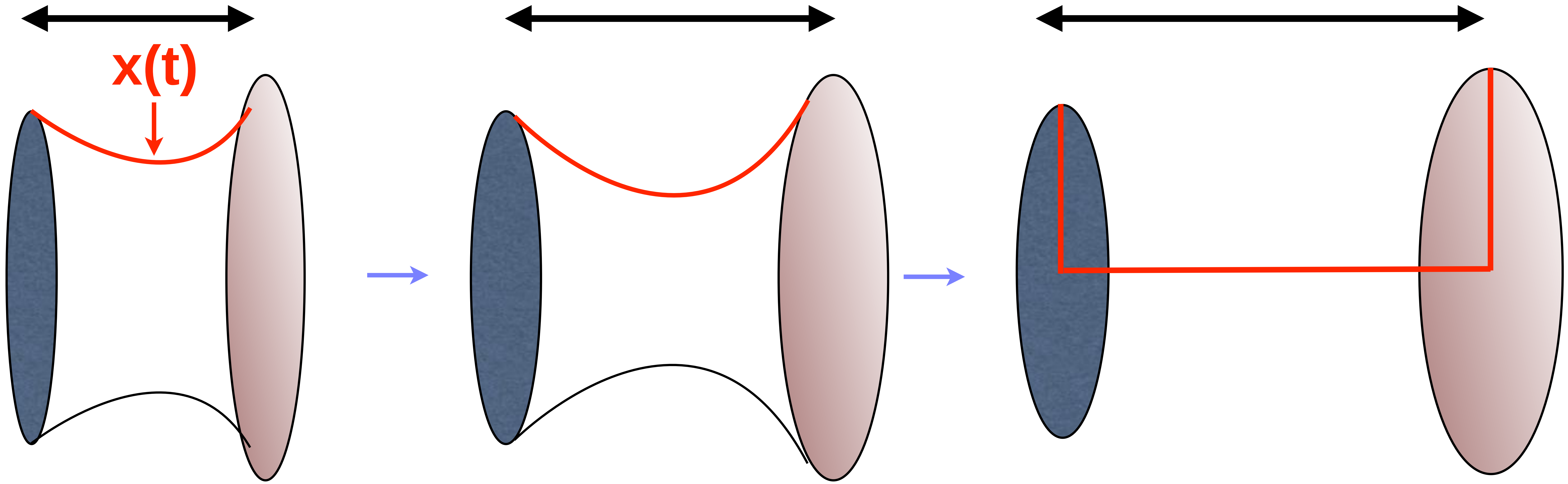
Cosa intendiamo con soluzione?



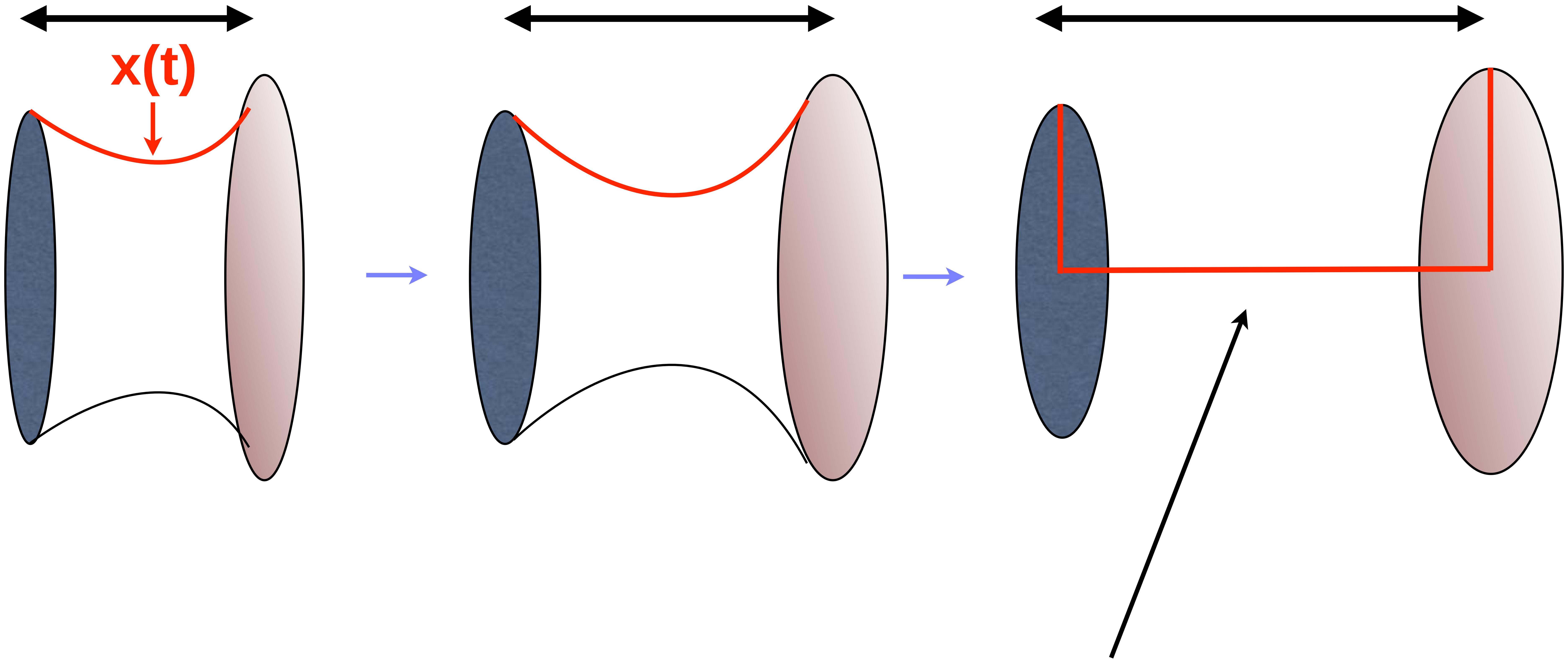
Cosa intendiamo con soluzione?



Cosa intendiamo con soluzione?



Cosa intendiamo con soluzione?

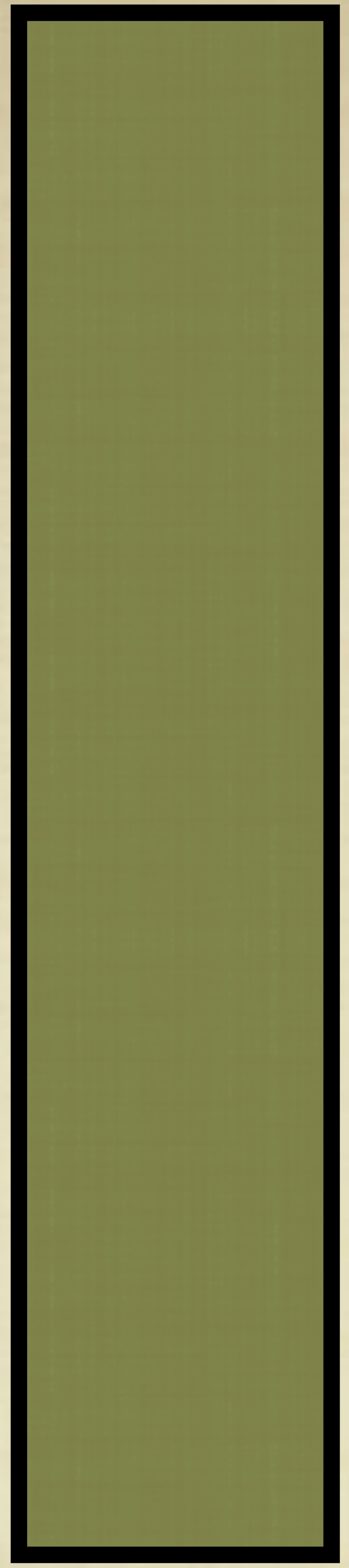


La soluzione di Goldschmidt
(1831)

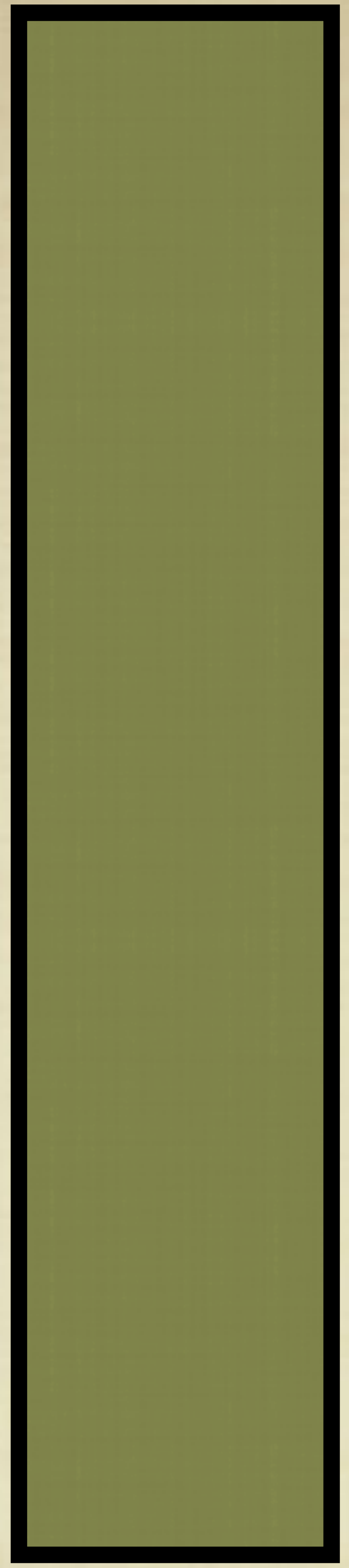
Il problema di Lagrange della colonna

Determinare la curva che ruotando attorno all'asse verticale genera una colonna di efficienza massima a parità di volume

Lagrange (1770) *Sur la figure des colonnes*



La soluzione di Lagrange: il cilindro.

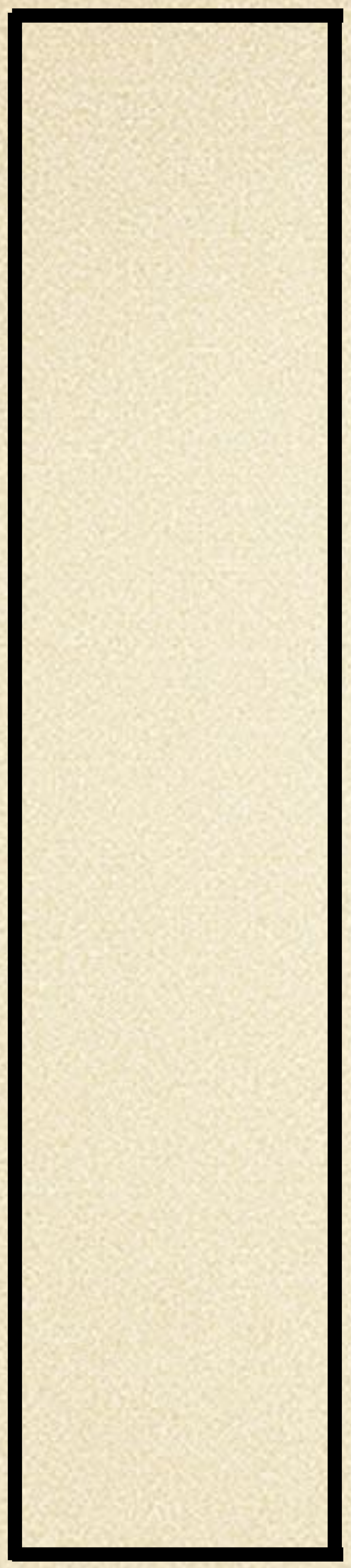


La soluzione di Lagrange: il cilindro.

(L’analisi conteneva un errore, che ha confermato la sua intuizione).

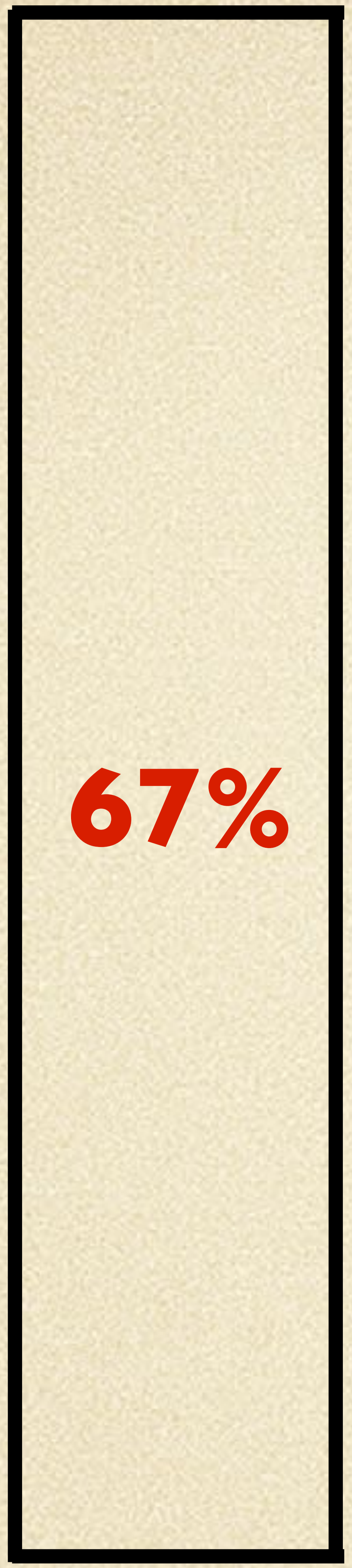
La colonna ottimale: tre soluzioni

La colonna ottimale: tre soluzioni



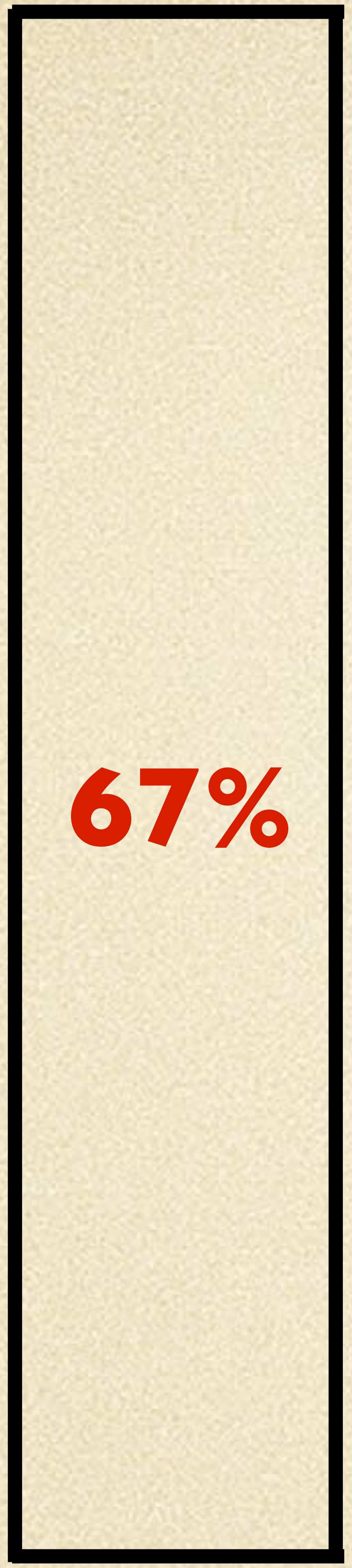
Lagrange
1770

La colonna ottimale: tre soluzioni

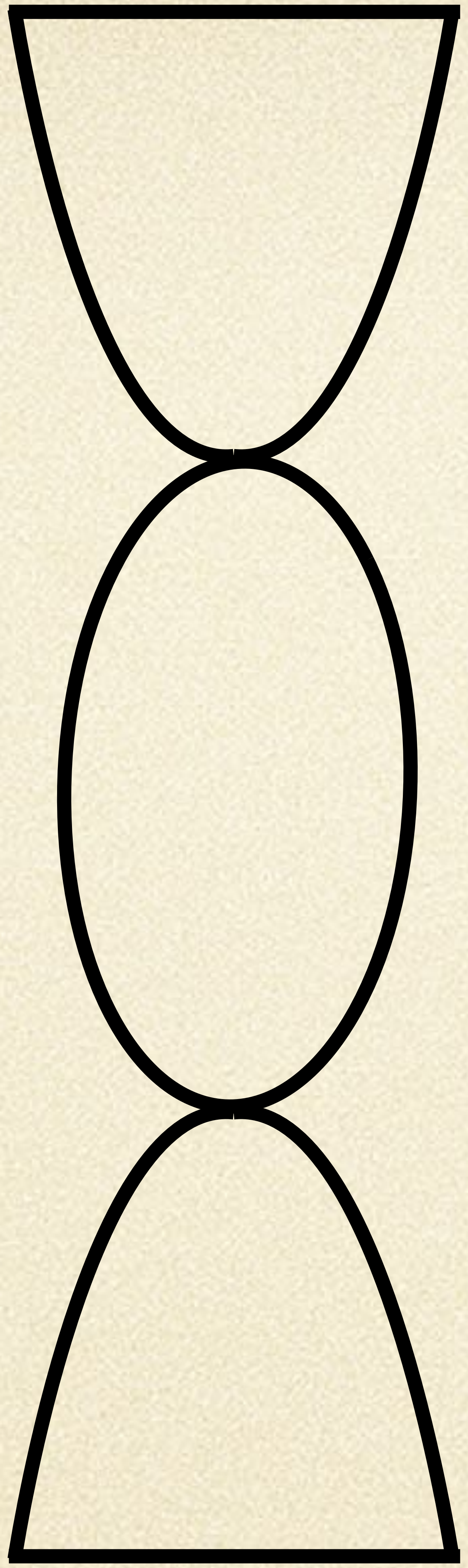


Lagrange
1770

La colonna ottimale: tre soluzioni

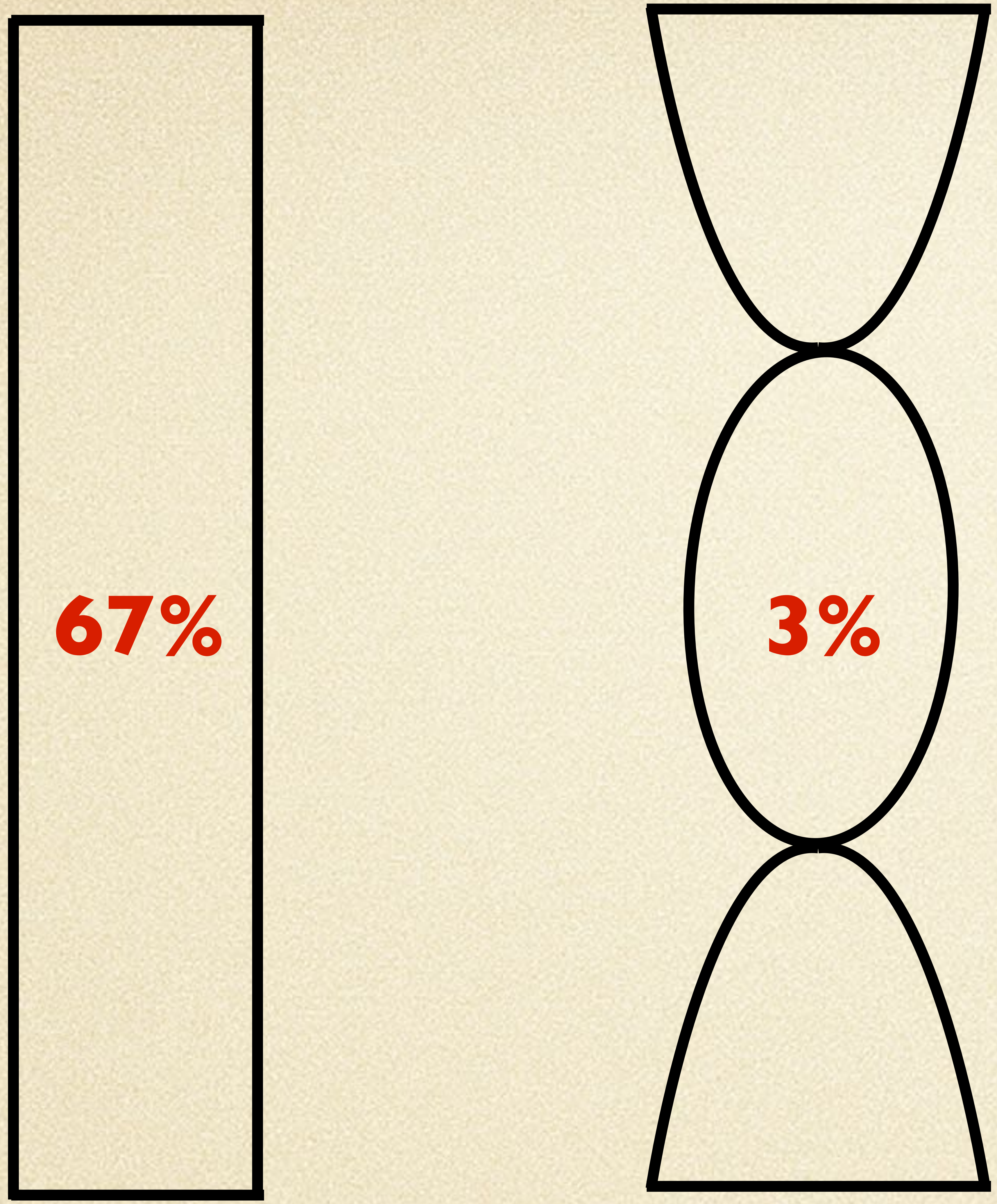


Lagrange
1770



Keller &
Tadjbaksh
1960

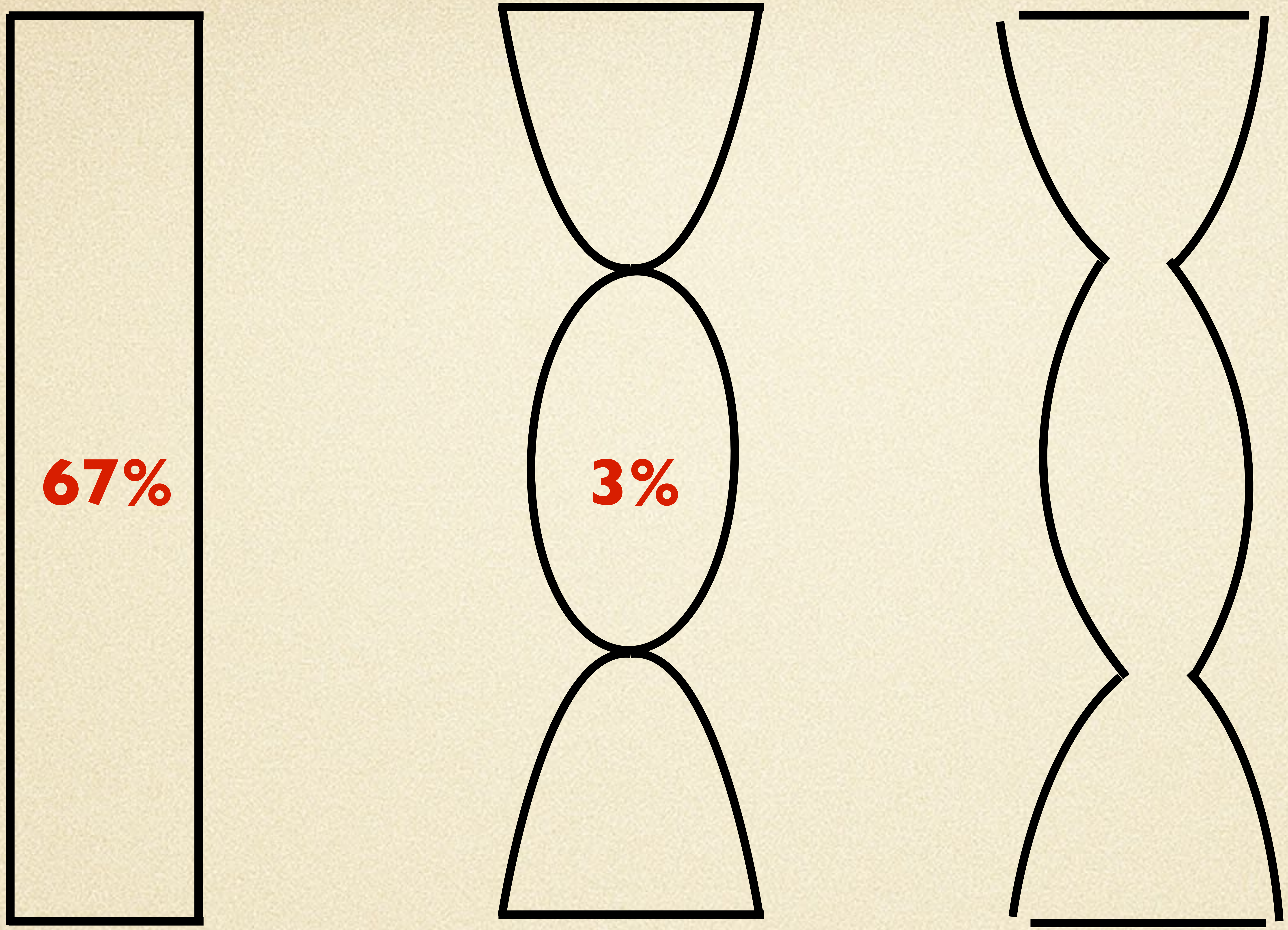
La colonna ottimale: tre soluzioni



Lagrange
1770

Keller &
Tadjbaksh
1960

La colonna ottimale: tre soluzioni

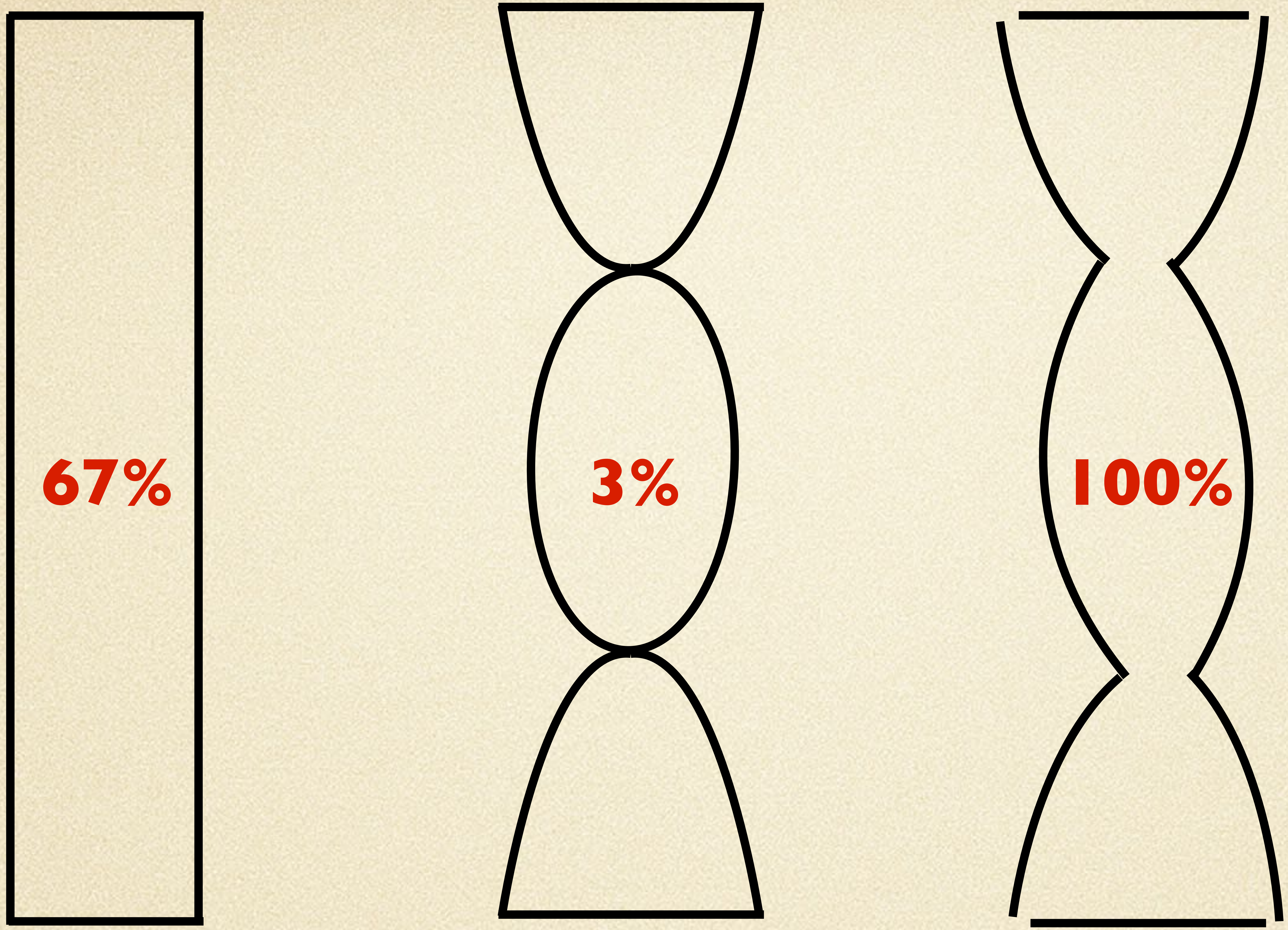


Lagrange
1770

Keller & Tadjbaksh
1960

Cox & Overton
1992
(analisi nonsmooth)

La colonna ottimale: tre soluzioni



Lagrange 1770

Keller & Tadjbaksh 1960

Cox & Overton 1992 ***(analisi nonsmooth)***

Applicazioni

Il restauro degli affreschi di Mantegna

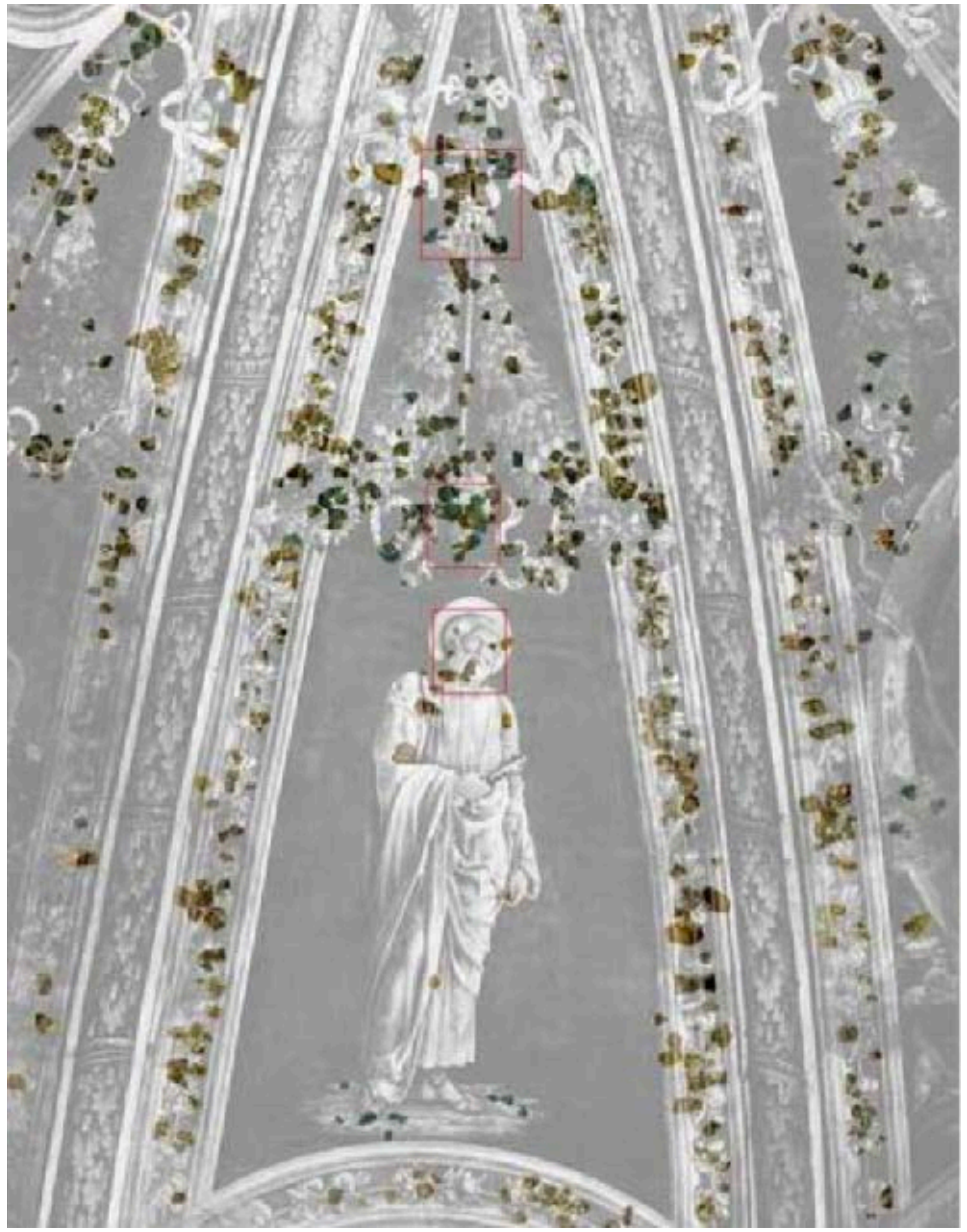
- Affreschi in una cappella della chiesa degli Eremitani distrutti da bombardamento
- 80 mila pezzi molto piccoli (5-6 cm^2) in 113 casse
- Individuazioni di procedimenti matematici basati su metodi di ottimizzazioni per:

Il restauro degli affreschi di Mantegna

- Affreschi in una cappella della chiesa degli Eremitani distrutti da bombardamento
- 80 mila pezzi molto piccoli (5-6 cm^2) in 113 casse
- Individuazioni di procedimenti matematici basati su metodi di ottimizzazioni per:

  a) identificazione di due immagini indipendentemente dalla mutua rotazione e altrettanto efficiente nell'ignorare distorsioni e disturbi

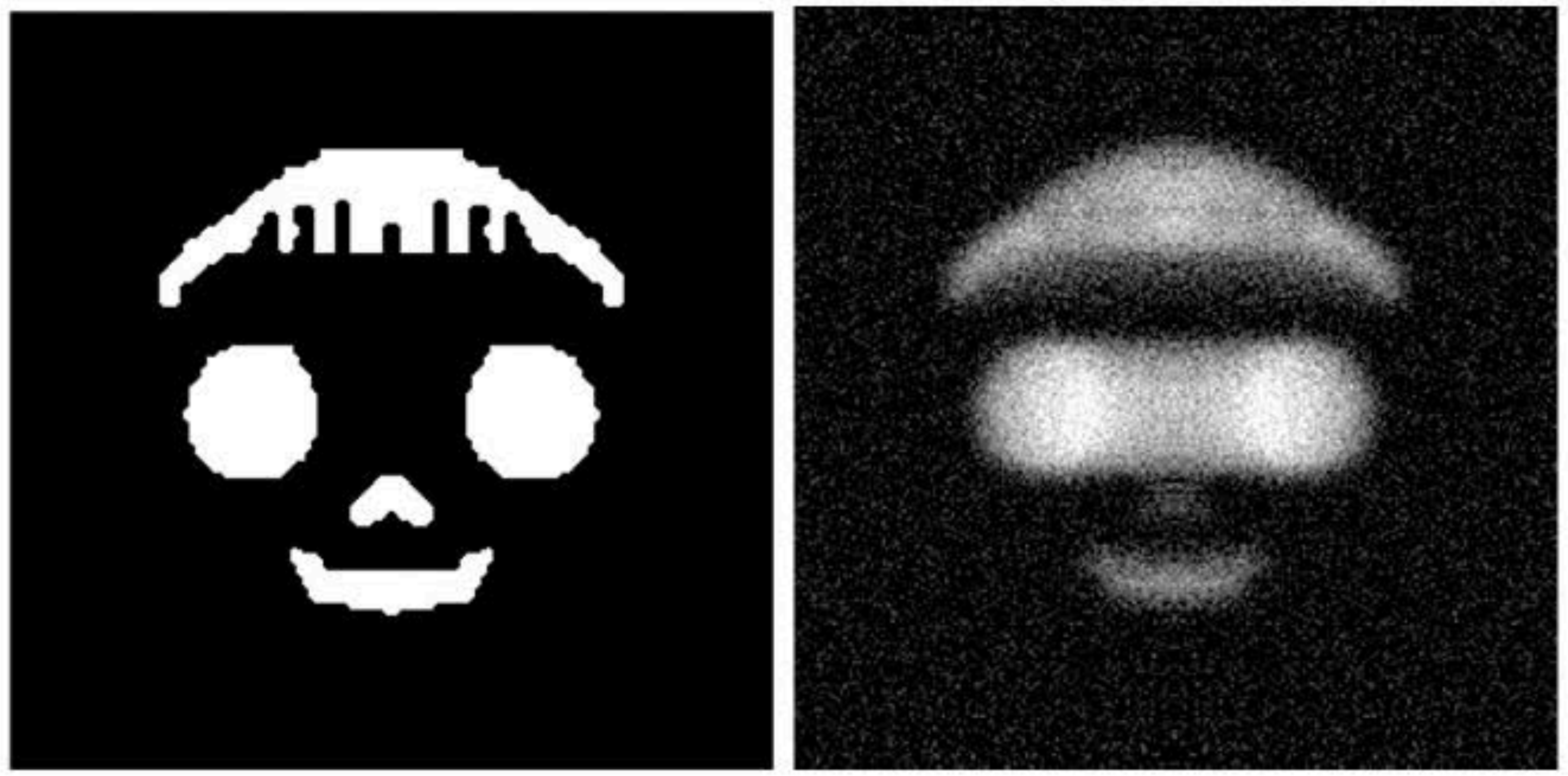
  b) recuperare la cromia delle lacune a partire dal colore dei frammenti e dai livelli di grigio delle parti mancanti: matematica simile a quella della diffusione del calore



https://webmagazine.unitn.it/eventi/22997/quando-la-matematica-salva-un-mantegna

Ricostruzione di immagini

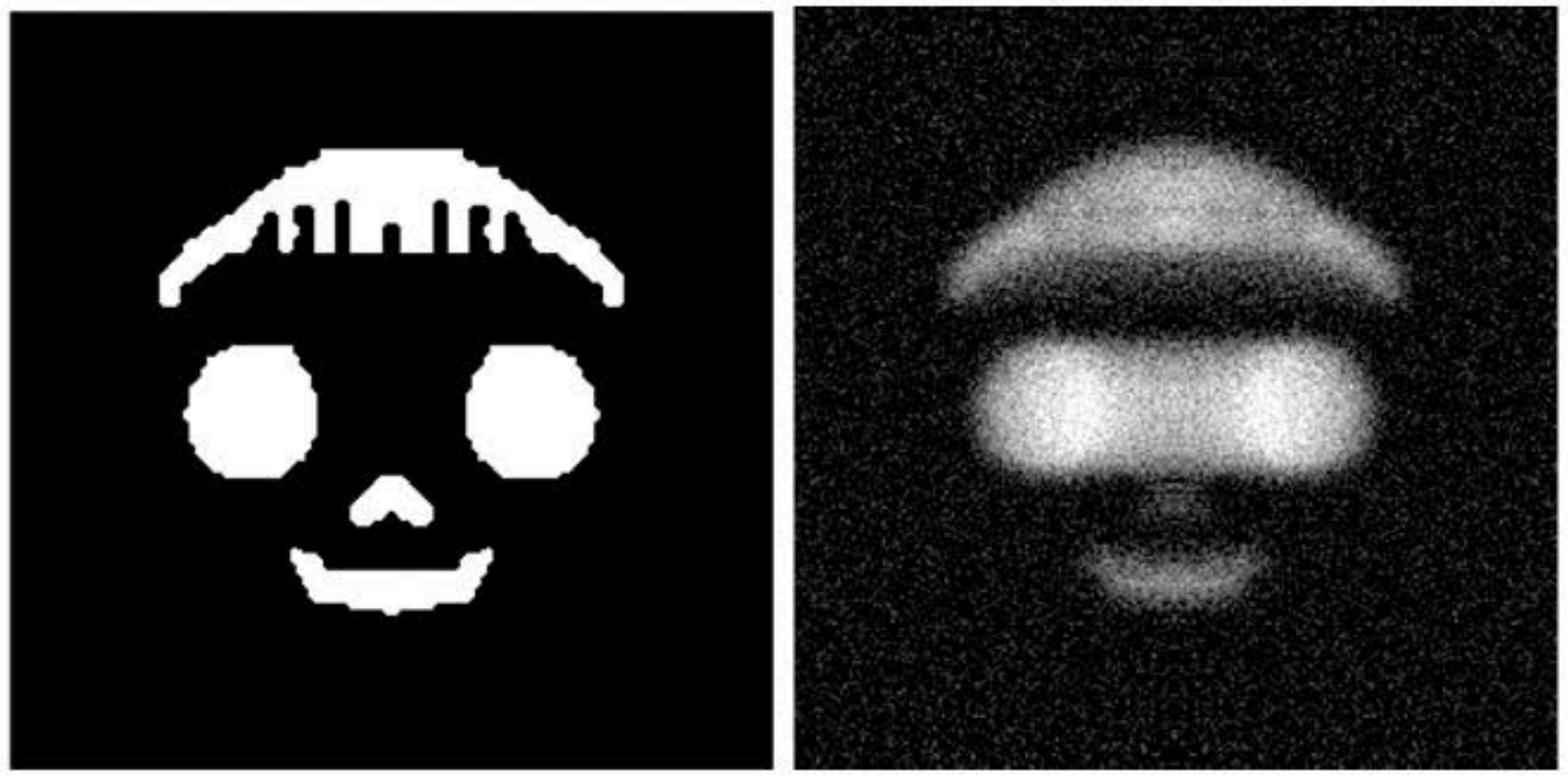
Tomographic Reconstruction with Few Views



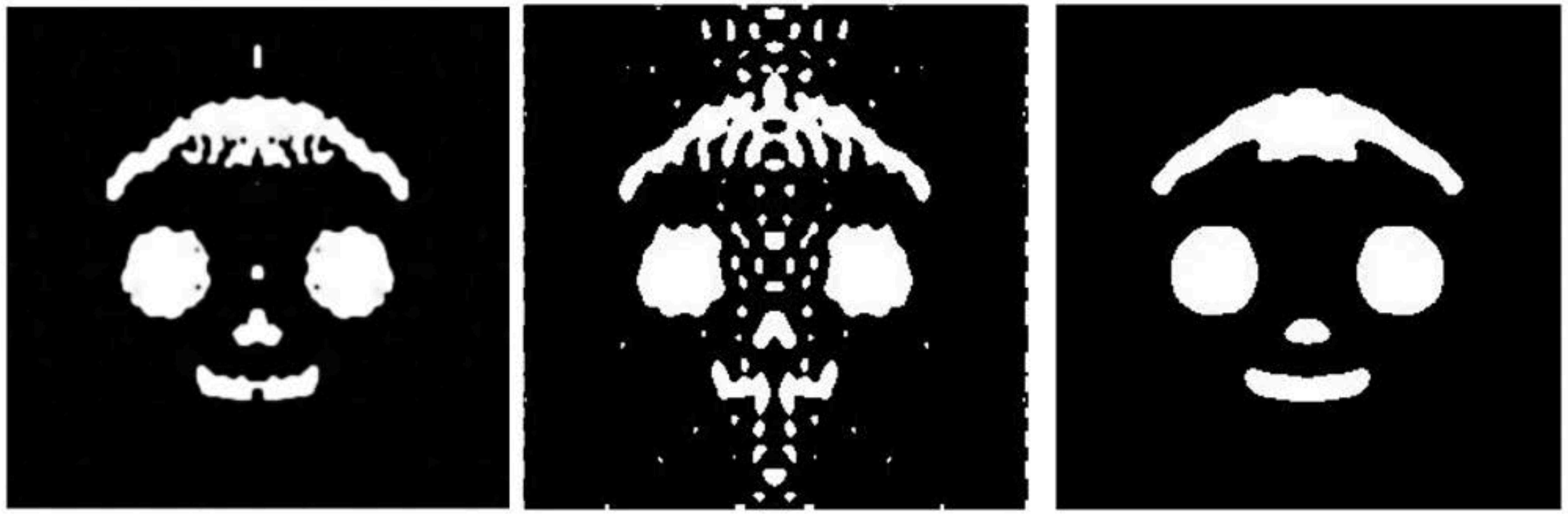
(a) Original image (b) Observed image u_d

Ricostruzione di immagini

Tomographic Reconstruction with Few Views

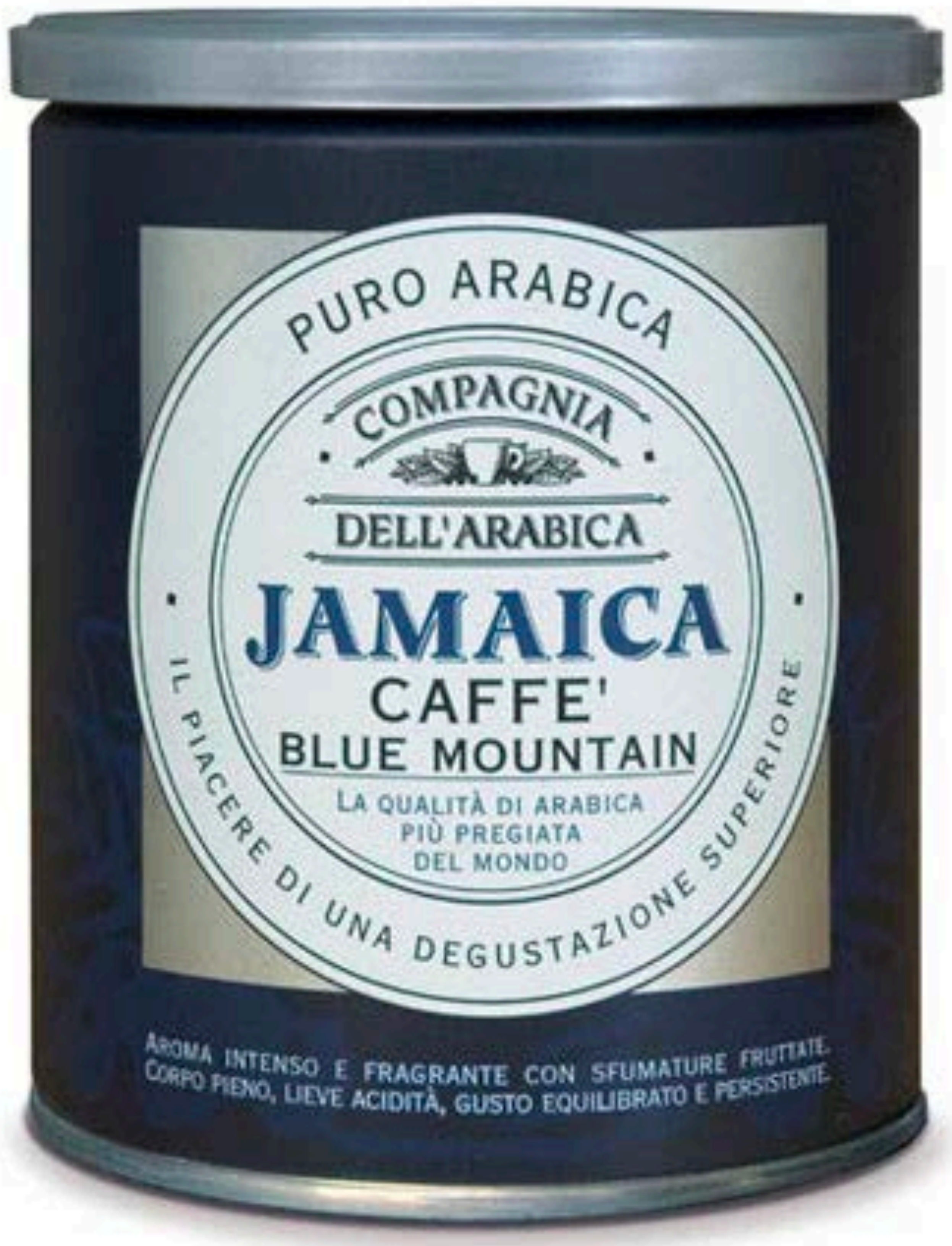


(a) Original image (b) Observed image u_d



(c) Fractional laplacian reconstruction, $\varepsilon = 0.5$, $\alpha = 5$, $\beta = 0$ (d) Smooth truncated Needlet reconstruction (e) Threshold Needlet reconstruction

La confezione di caffè



Problema. Scatola cilindrica di caffè da 880 ml. Qual è l'altezza e il raggio che permettono di minimizzare il costo del metallo utilizzato?

Problema. Scatola cilindrica di caffè da 880 ml. Qual è l'altezza e il raggio che permettono di minimizzare il costo del metallo utilizzato?

1) Qual è il volume di una tale scatola di altezza h e raggio R ?

Problema. Scatola cilindrica di caffè da 880 ml. Qual è l'altezza e il raggio che permettono di minimizzare il costo del metallo utilizzato?

1) Qual è il volume di una tale scatola di altezza *h* e raggio *R* ? $\pi R^2 h$

Problema. Scatola cilindrica di caffè da 880 ml. Qual è l'altezza e il raggio che permettono di minimizzare il costo del metallo utilizzato?

1) Qual è il volume di una tale scatola di altezza h e raggio R ? $\pi R^2 h$

2) Ricavare h (cm) in funzione di R (cm)

Problema. Scatola cilindrica di caffè da 880 ml. Qual è l'altezza e il raggio che permettono di minimizzare il costo del metallo utilizzato?

1) Qual è il volume di una tale scatola di altezza *h* e raggio *R* ? $\pi R^2 h$

2) Ricavare *h* (cm) in funzione di *R* (cm) $h = \dfrac{880}{\pi R^2}$

Problema. Scatola cilindrica di caffè da 880 ml. Qual è l'altezza e il raggio che permettono di minimizzare il costo del metallo utilizzato?

1) Qual è il volume di una tale scatola di altezza *h* e raggio *R* ? $\pi R^2 h$

2) Ricavare *h* (cm) in funzione di *R* (cm) $h = \dfrac{880}{\pi R^2}$

3) Qual è l'area della confezione, base e coperchio inclusi (in funzione di *R*)?

Problema. Scatola cilindrica di caffè da 880 ml. Qual è l'altezza e il raggio che permettono di minimizzare il costo del metallo utilizzato?

1) Qual è il volume di una tale scatola di altezza *h* e raggio *R* ? $\pi R^2 h$

2) Ricavare *h* (cm) in funzione di *R* (cm) $h = \dfrac{880}{\pi R^2}$

3) Qual è l'area della confezione, base e coperchio inclusi (in funzione di *R*)?

$$2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi \frac{880}{\pi R} + 2\pi R^2$$

Problema. Scatola cilindrica di caffè da 880 ml. Qual è l'altezza e il raggio che permettono di minimizzare il costo del metallo utilizzato?

1) Qual è il volume di una tale scatola di altezza *h* e raggio *R* ? $\pi R^2 h$

2) Ricavare *h* (cm) in funzione di *R* (cm) $h = \dfrac{880}{\pi R^2}$

3) Qual è l'area della confezione, base e coperchio inclusi (in funzione di *R*)?

$$2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi \frac{880}{\pi R} + 2\pi R^2 = \frac{1760}{R} + 2\pi R^2$$

Problema. Scatola cilindrica di caffè da 880 ml. Qual è l'altezza e il raggio che permettono di minimizzare il costo del metallo utilizzato?

1) Qual è il volume di una tale scatola di altezza *h* e raggio *R* ? $\pi R^2 h$

2) Ricavare *h* (cm) in funzione di *R* (cm) $h = \dfrac{880}{\pi R^2}$

3) Qual è l'area della confezione, base e coperchio inclusi (in funzione di *R*)?

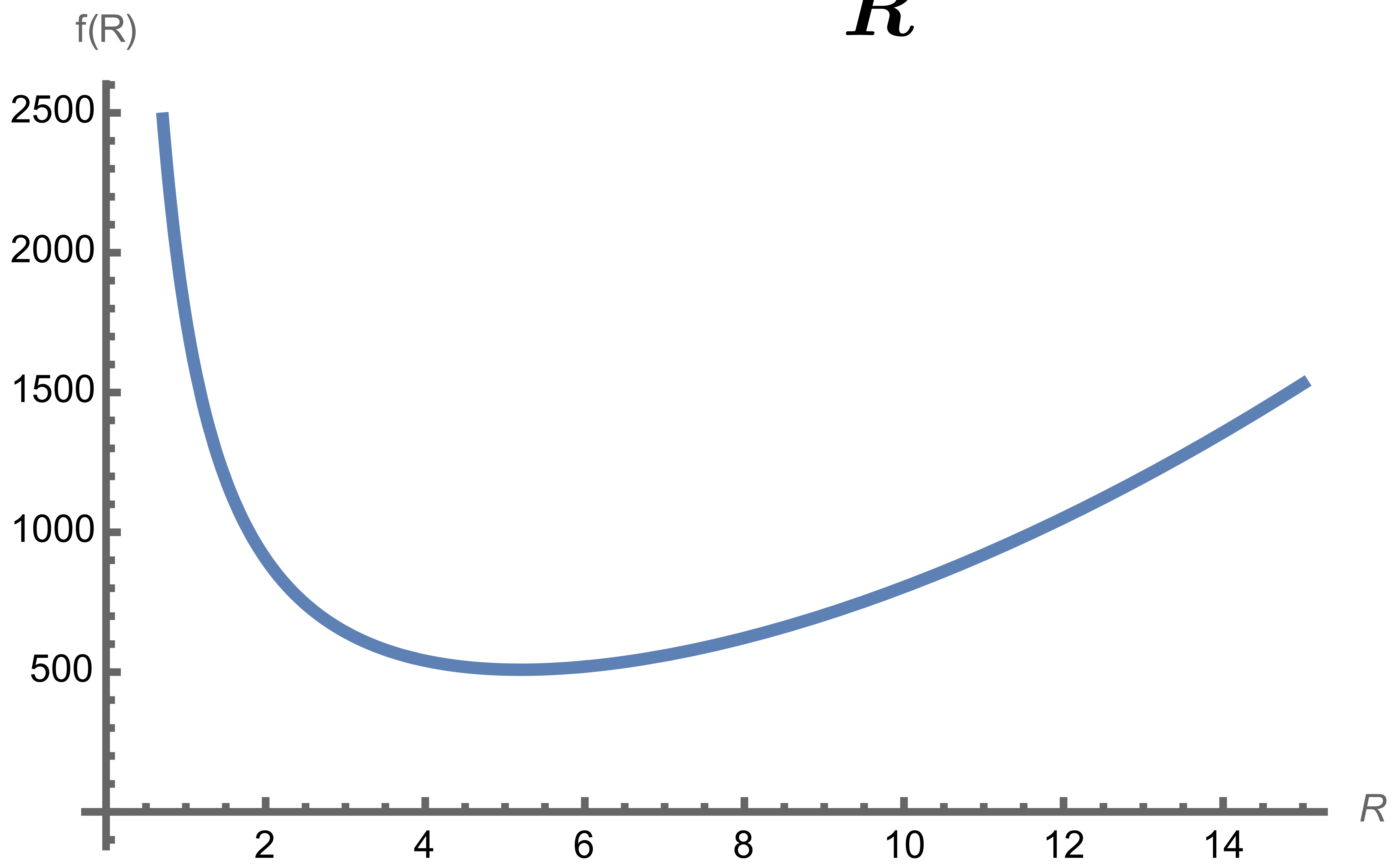
$$2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \frac{880}{\pi R} + 2\pi R^2 = \boxed{\frac{1760}{R} + 2\pi R^2 := f(R)}$$

Studiamo $\boldsymbol{f(R) = \frac{1760}{R} + 2\pi R^2, R > 0}$

Studiamo $f(R) = \dfrac{1760}{R} + 2\pi R^2, R > 0$

Ricordiamo: è la superficie di metallo utilizzata per una scatola cilindrica di raggio R e volume fissato pari a 880 cm^3

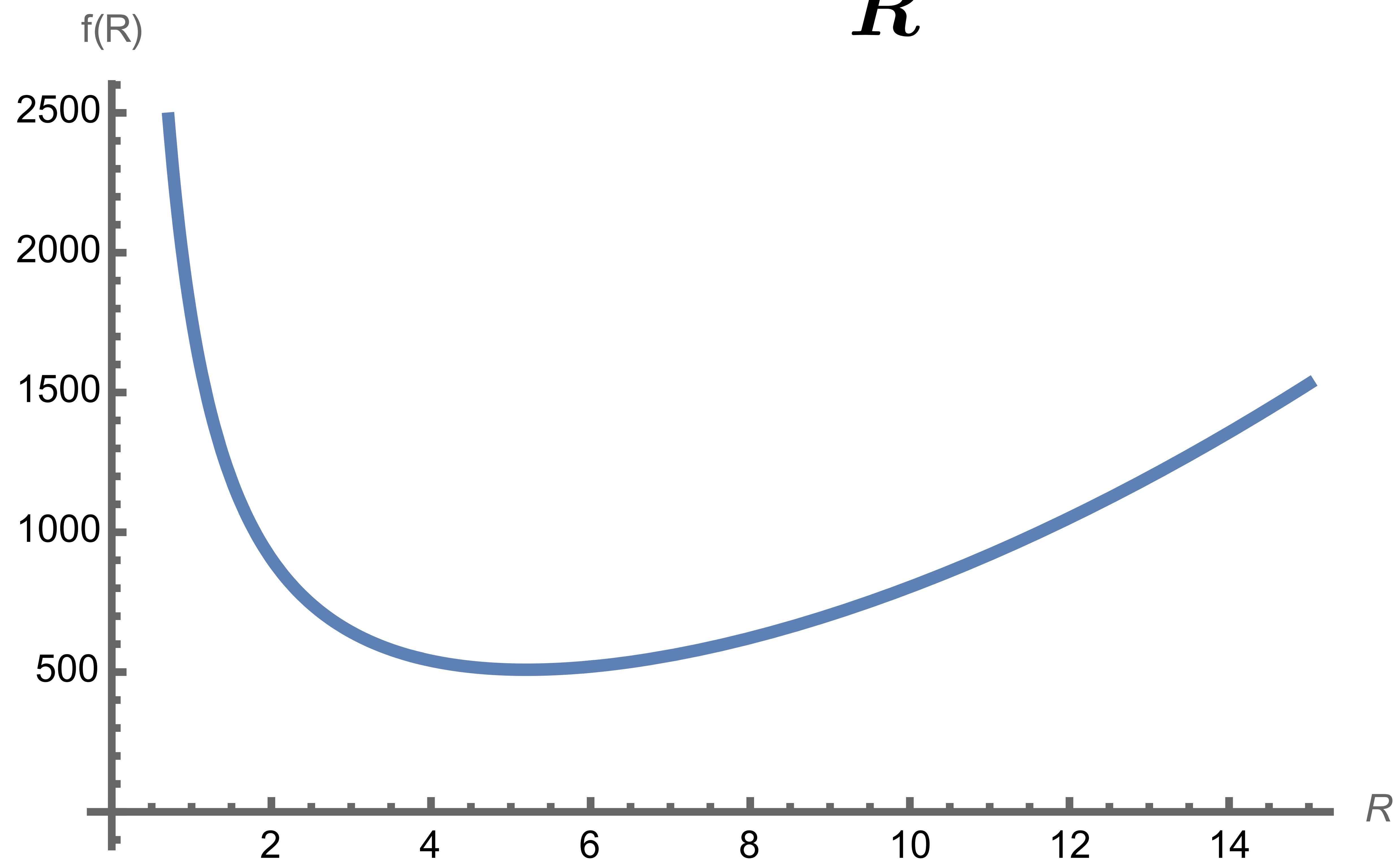
Studiamo $f(R) = \dfrac{1760}{R} + 2\pi R^2, R > 0$



Ricordiamo: è la superficie di metallo utilizzata per una scatola cilindrica di raggio R e volume fissato pari a 880 cm^3

Studiamo $f(R)=\dfrac{1760}{R}+2\pi R^2,\, R>0$

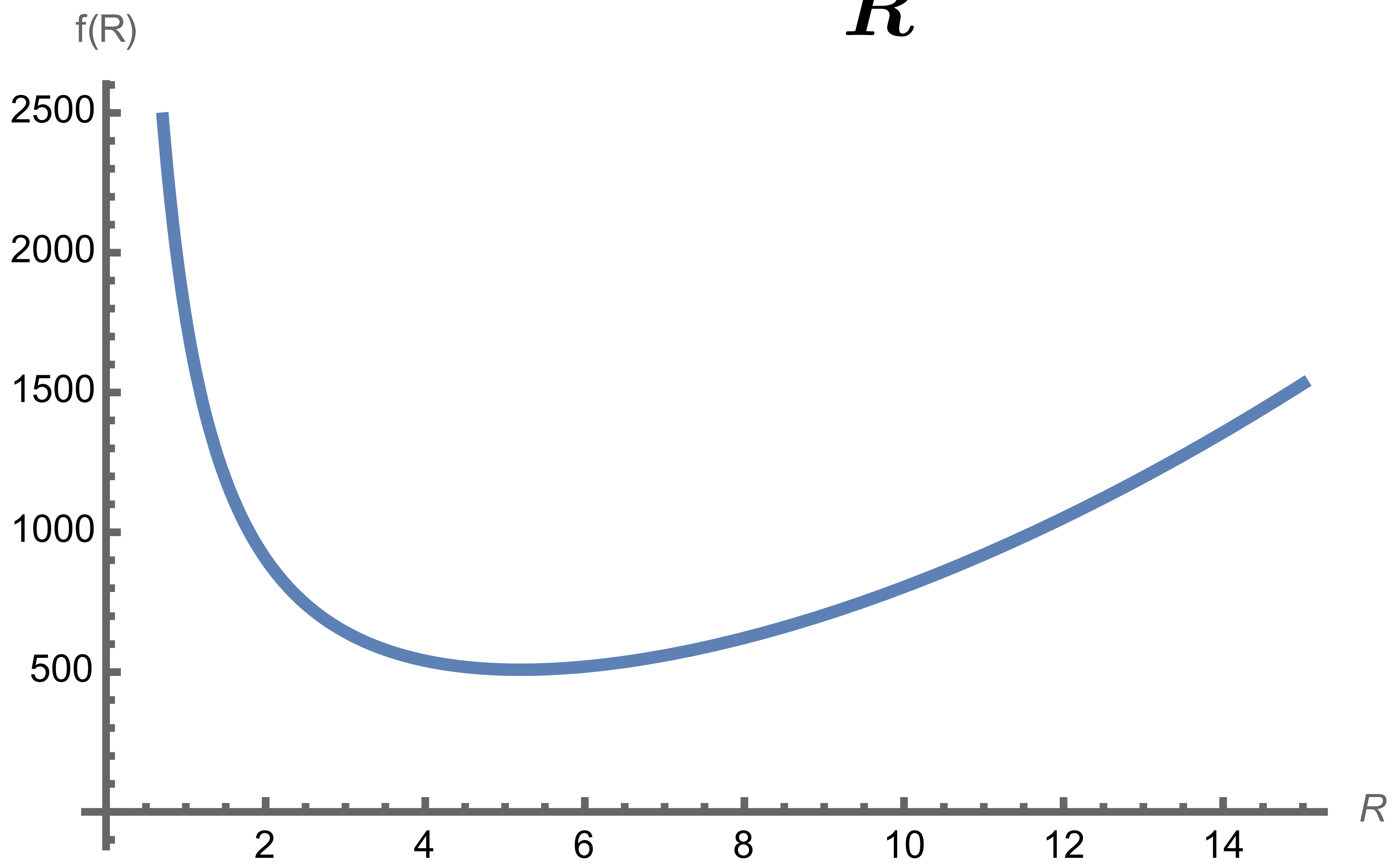
Ricordiamo: è la superficie di metallo utilizzata per una scatola cilindrica di raggio R e volume fissato pari a 880 cm³



$$f'(R)=-\frac{1760}{R^2}+4\pi R$$

Studiamo $f(R) = \dfrac{1760}{R} + 2\pi R^2, R > 0$

Ricordiamo: è la superficie di metallo utilizzata per una scatola cilindrica di raggio R e volume fissato pari a 880 cm³

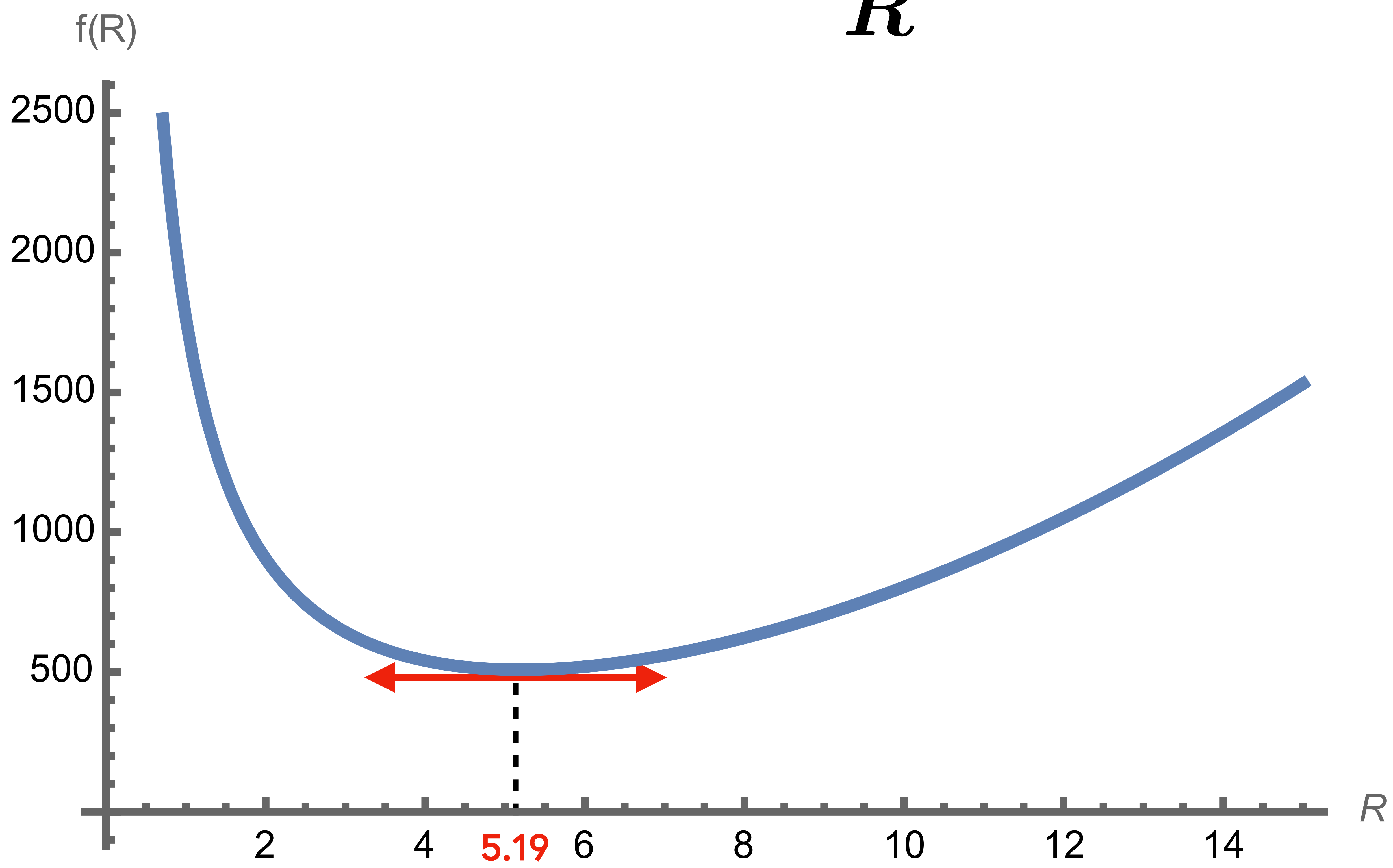


$$f'(R) = -\frac{1760}{R^2} + 4\pi R$$

$$= 0 \Leftrightarrow \quad R = 2\sqrt[3]{\frac{55}{\pi}}$$

Studiamo $f(R) = \frac{1760}{R} + 2\pi R^2, R > 0$

Ricordiamo: è la superficie di metallo utilizzata per una scatola cilindrica di raggio R e volume fissato pari a 880 cm³



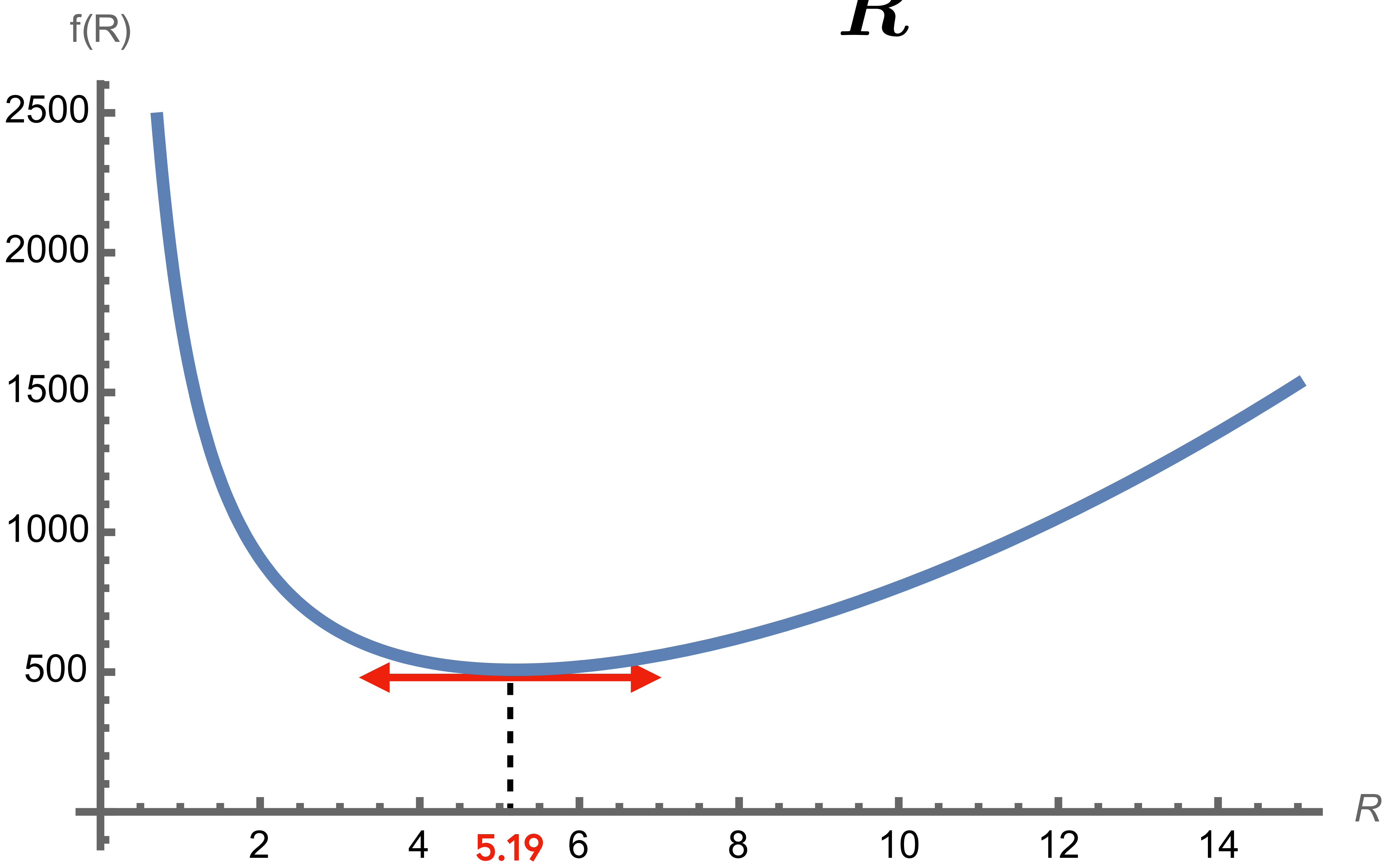
$$f'(R) = -\frac{1760}{R^2} + 4\pi R$$

$$= 0 \Leftrightarrow \quad R = 2\sqrt[3]{\frac{55}{\pi}}$$

$$= 5.19319... \approx 5.19$$

Studiamo $f(R) = \dfrac{1760}{R} + 2\pi R^2,\ R > 0$

Ricordiamo: è la superficie di metallo utilizzata per una scatola cilindrica di raggio R e volume fissato pari a 880 cm³



$$f'(R) = -\frac{1760}{R^2} + 4\pi R$$

$$= 0 \Leftrightarrow \quad R = 2\sqrt[3]{\frac{55}{\pi}}$$

$$= 5.19319_{\ldots} \approx 5.19$$

Viene $\boxed{R \approx 5.2}$, $h = \dfrac{880}{\pi R^2} = 4\sqrt[3]{\dfrac{55}{\pi}} = 10.386\ldots \approx \boxed{10.4}$

Abbiamo trovato $R = 5.2$, $h = 10.4$

Abbiamo trovato $R = 5.2$, $h = 10.4$

$$R = 4.9$$

Tuttavia in realtà....

Abbiamo trovato R = 5.2, h = 10.4

$R = 4.9$

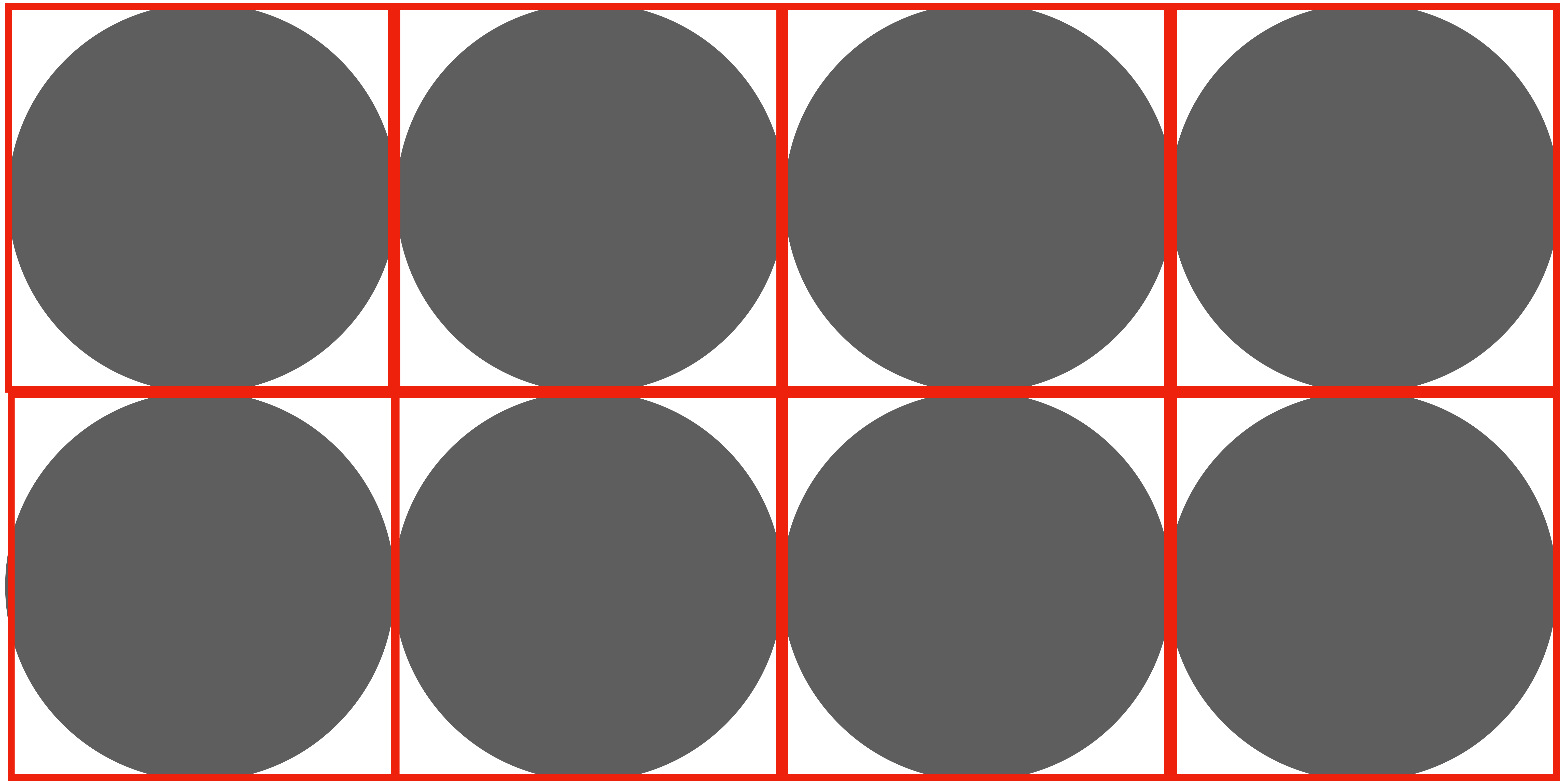
Tuttavia in realtà....

?

$h = 11.7$

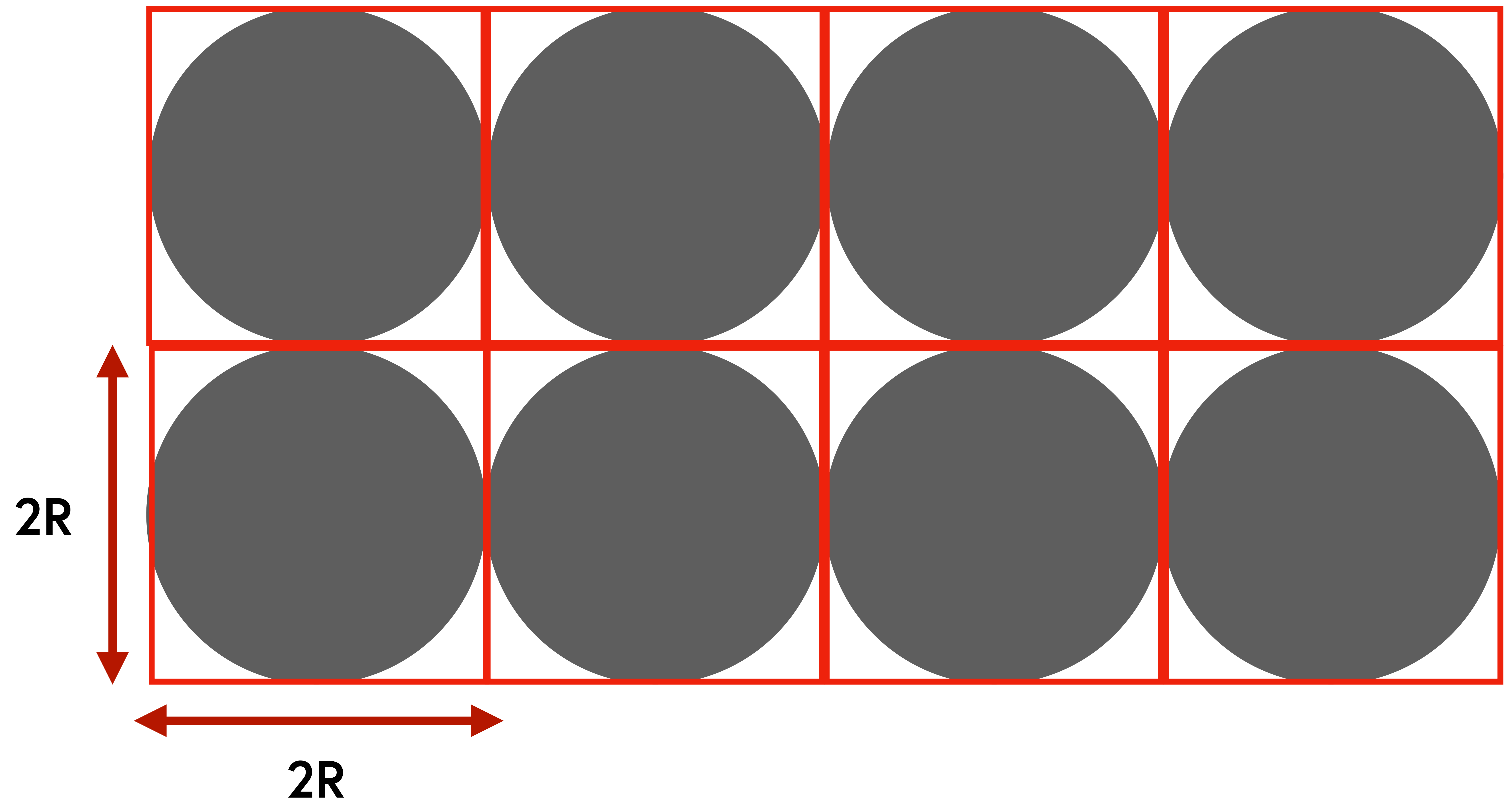
Gli scarti nella produzione dei dischi…

Metodo 1



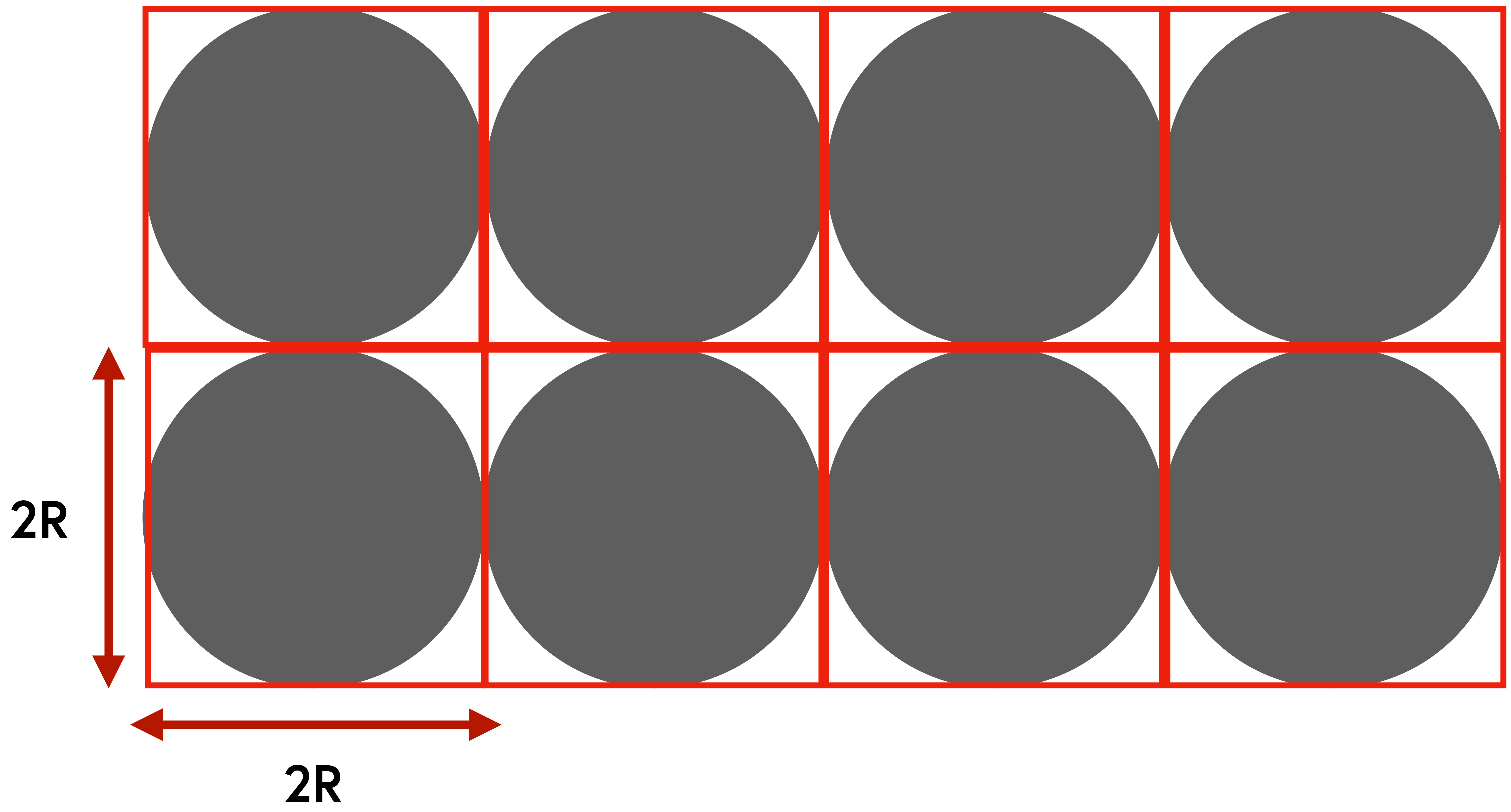
Gli scarti nella produzione dei dischi…

Metodo 1



Gli scarti nella produzione dei dischi…

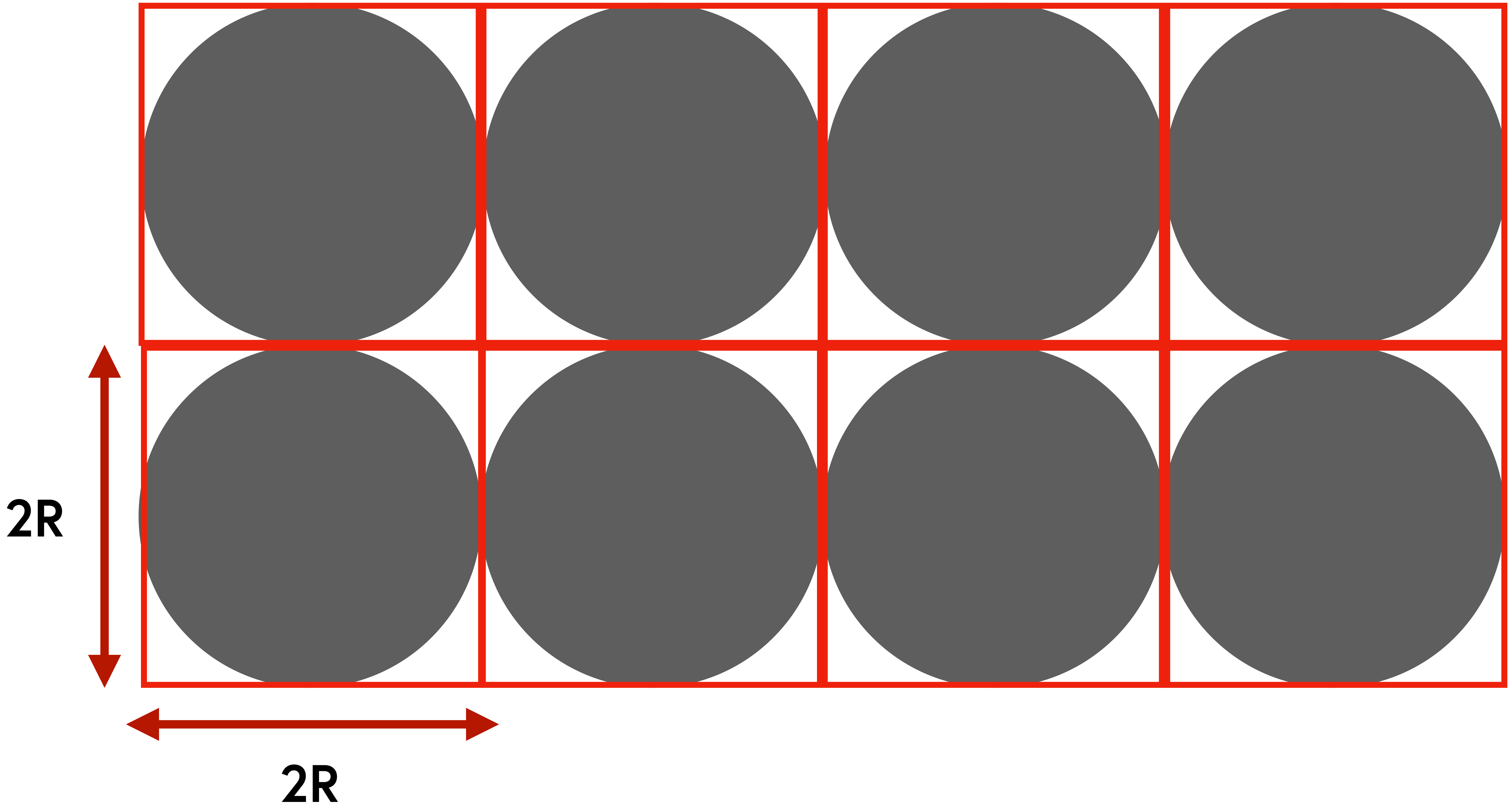
Metodo 1



Per fare un disco: $(2R) \times (2R) = 4R^2$

Gli scarti nella produzione dei dischi…

Metodo 1

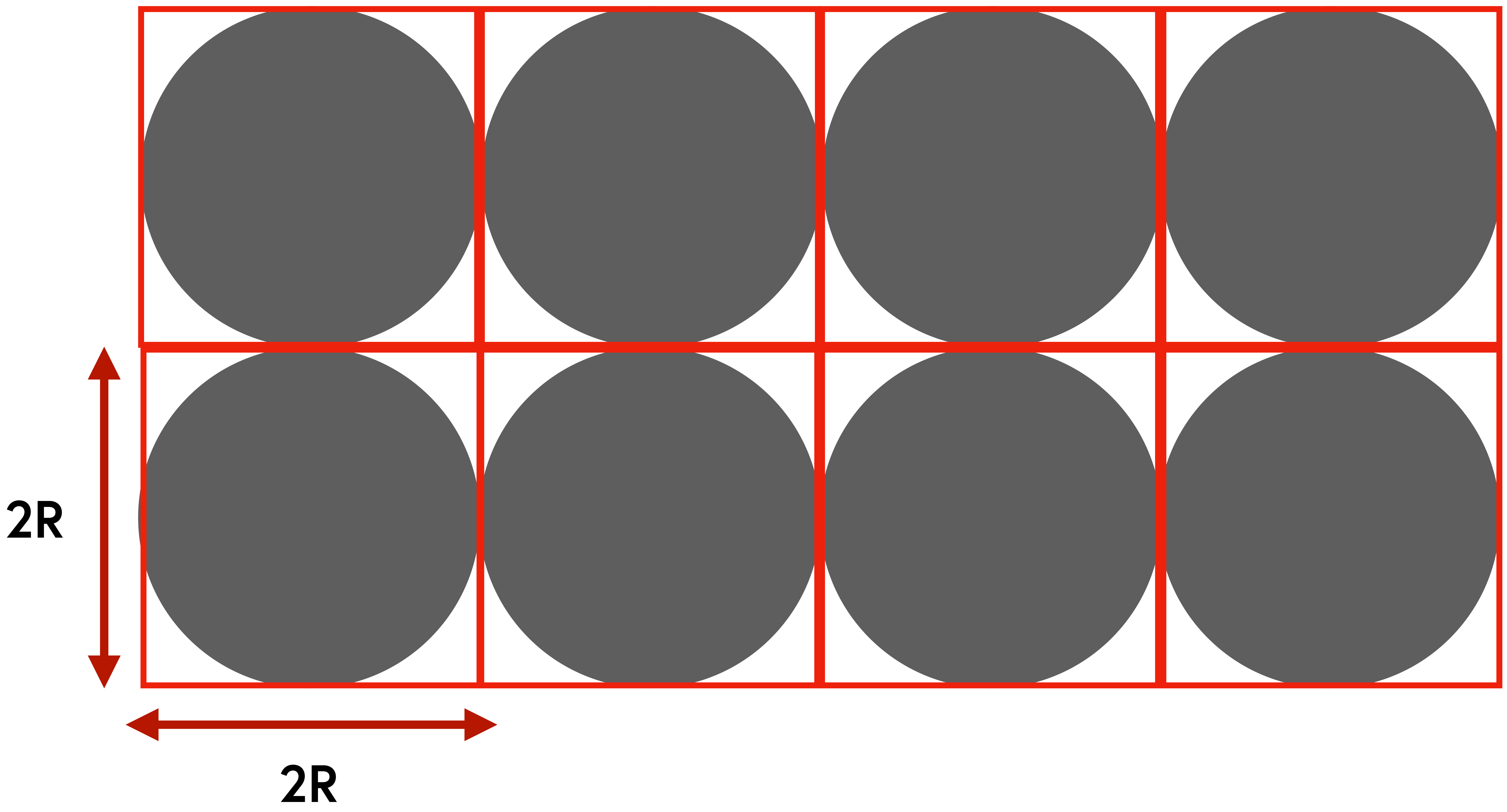


Per fare un disco: $(2R) \times (2R) = 4R^2$

Percentuale di scarto per disco:

Gli scarti nella produzione dei dischi…

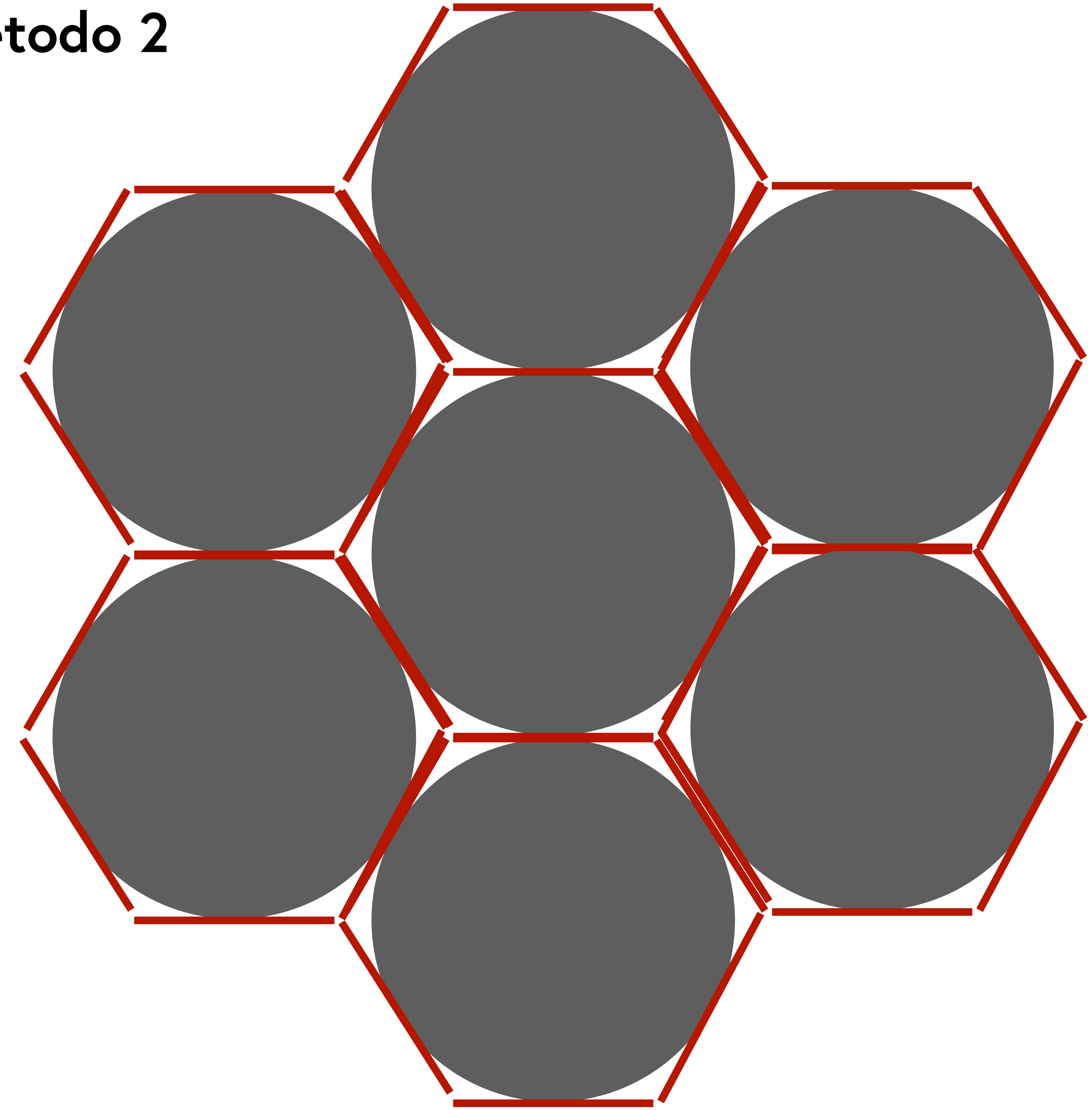
Metodo 1

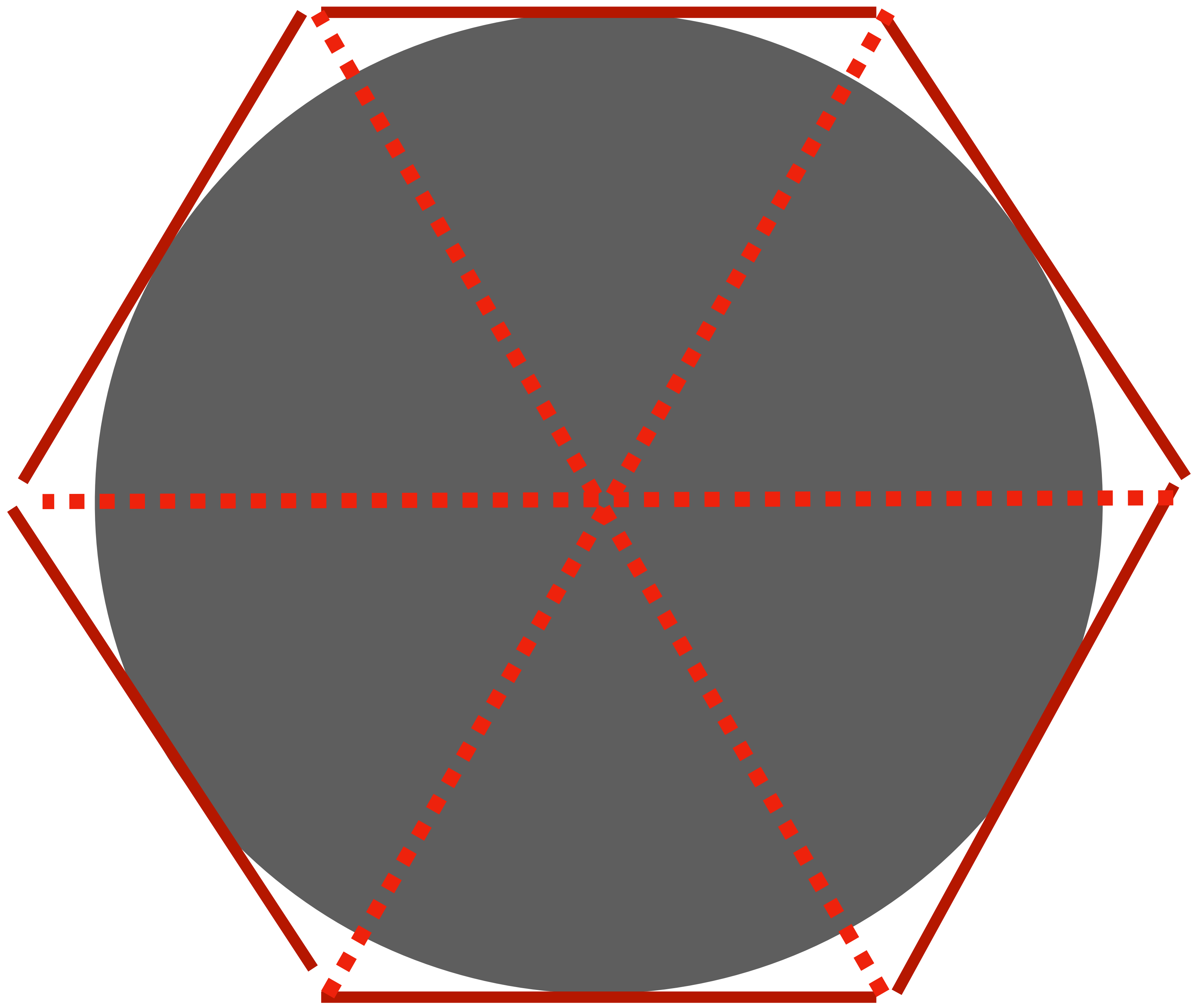


Per fare un disco: $(2R) \times (2R) = 4R^2$

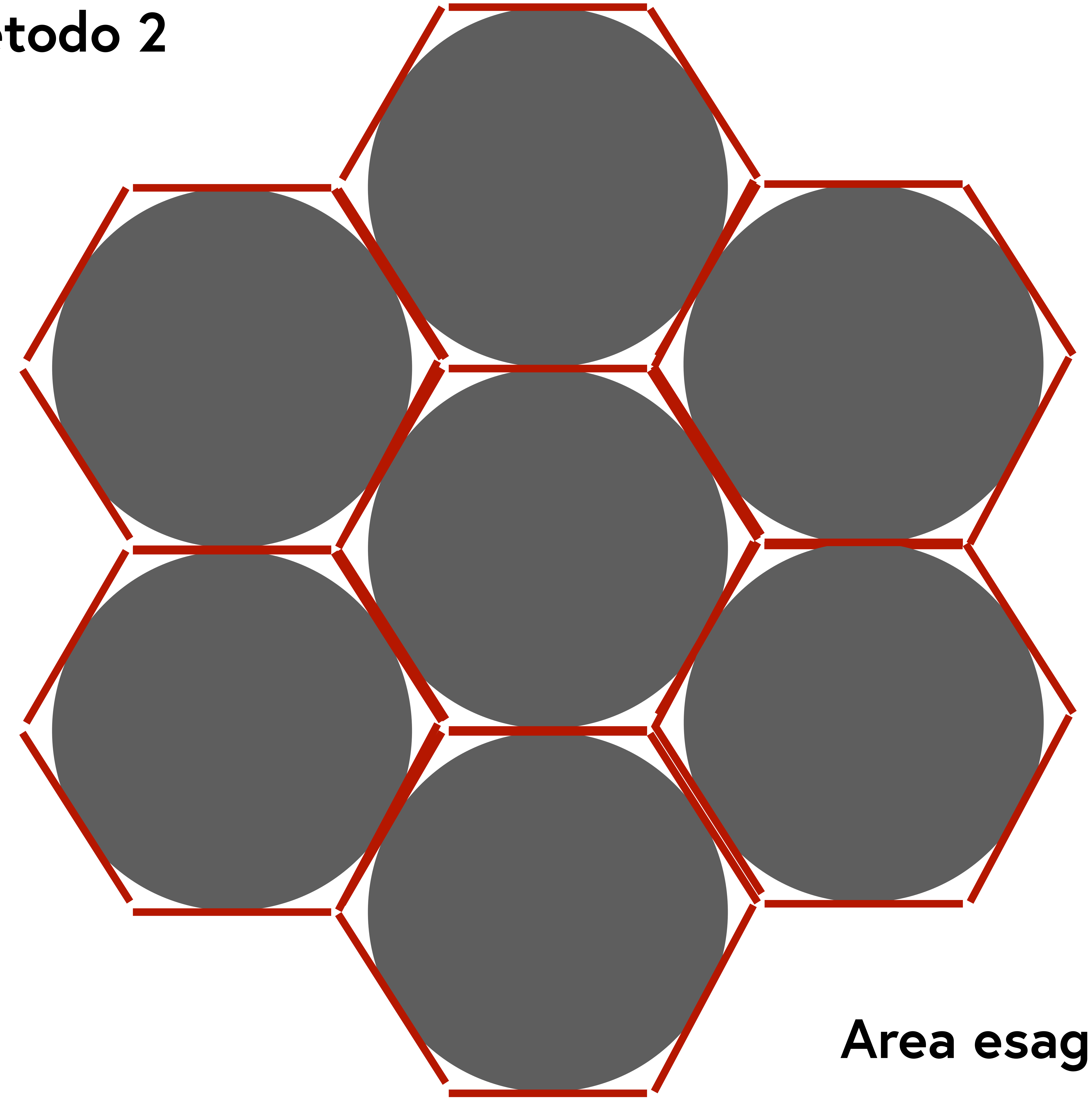
Percentuale di scarto per disco: $\dfrac{4R^2 - \pi R^2}{4R^2} = \dfrac{4-\pi}{4} \approx 21.5\%$

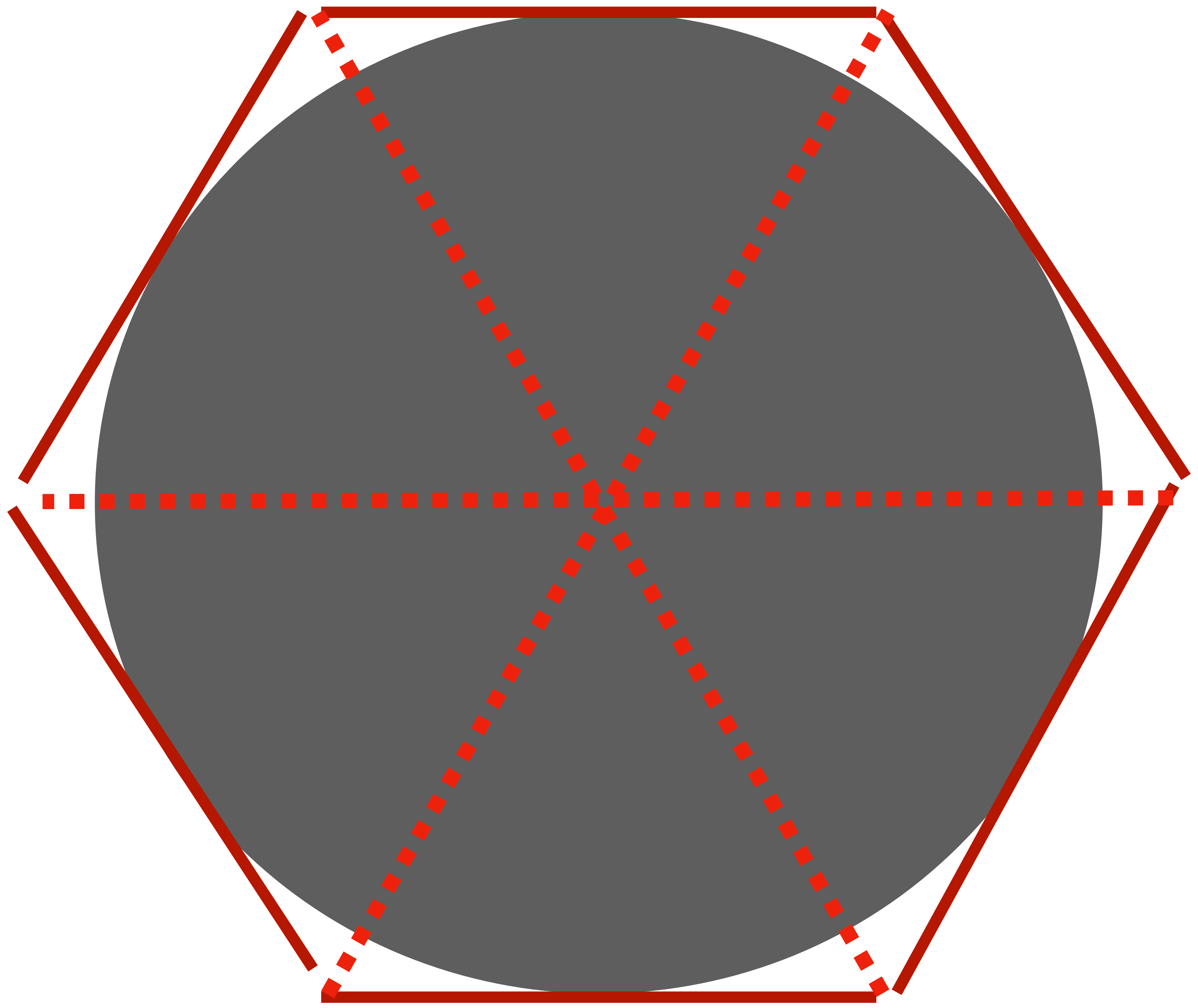
Metodo 2





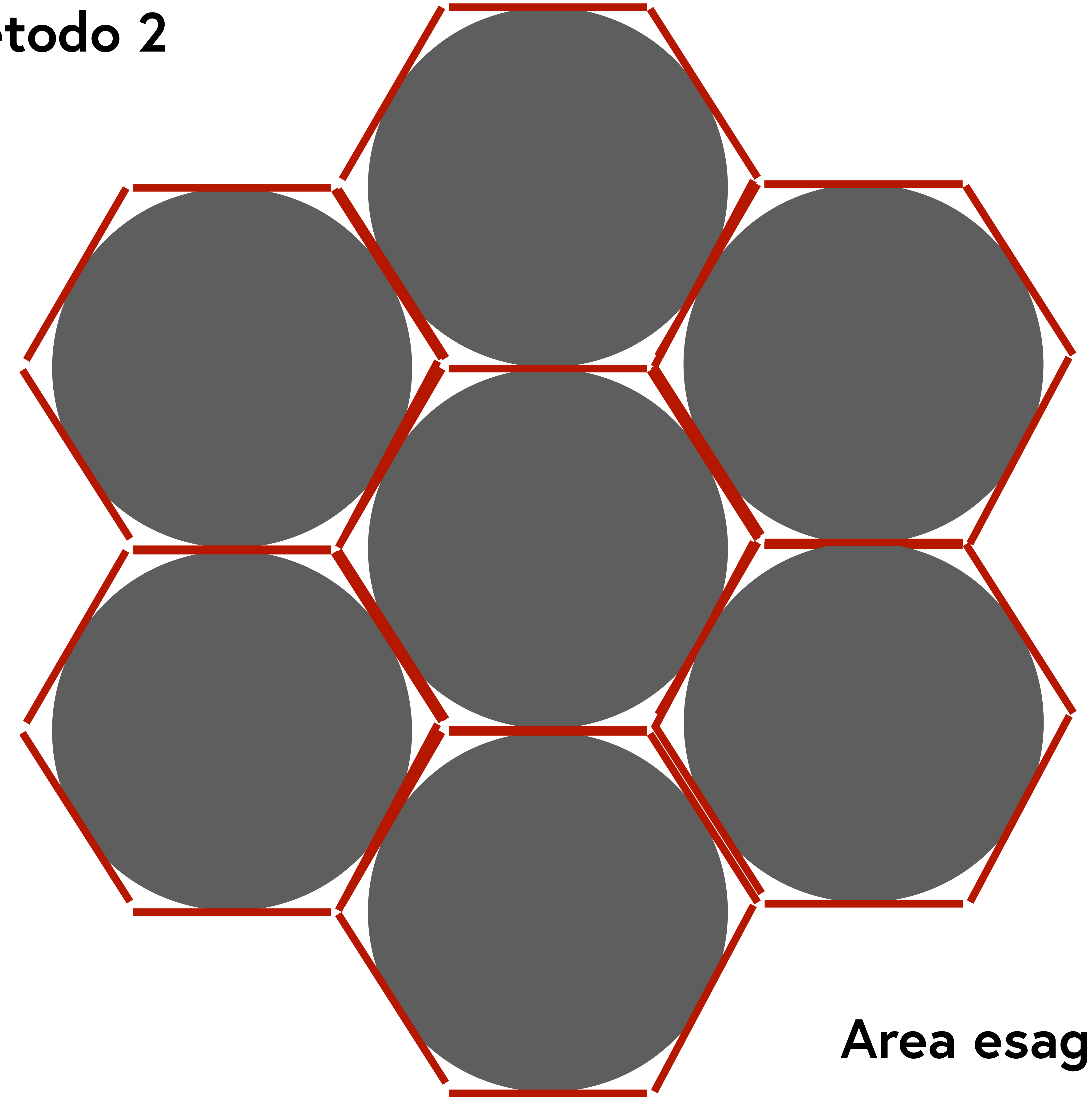
Metodo 2

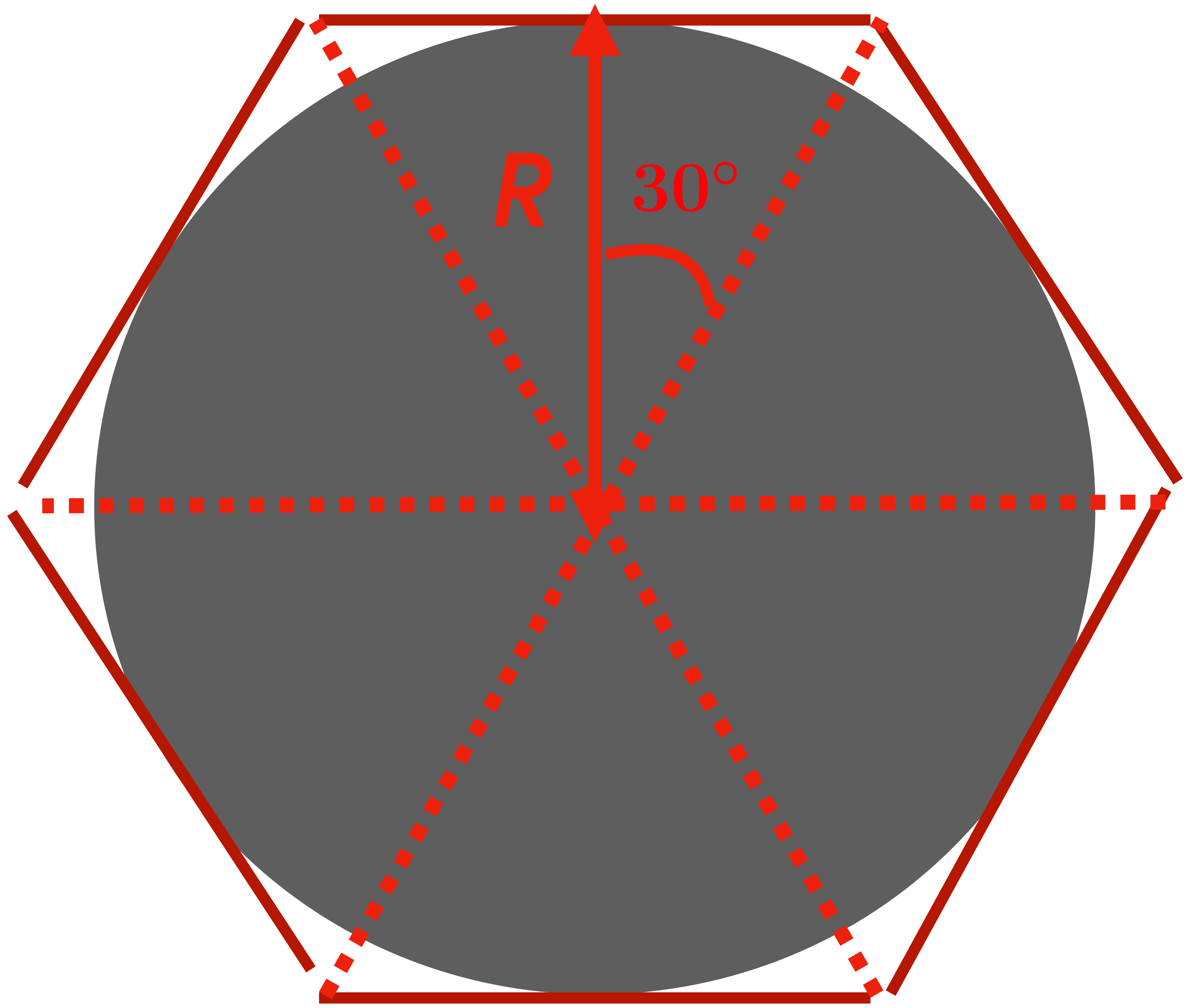




Area esagono:

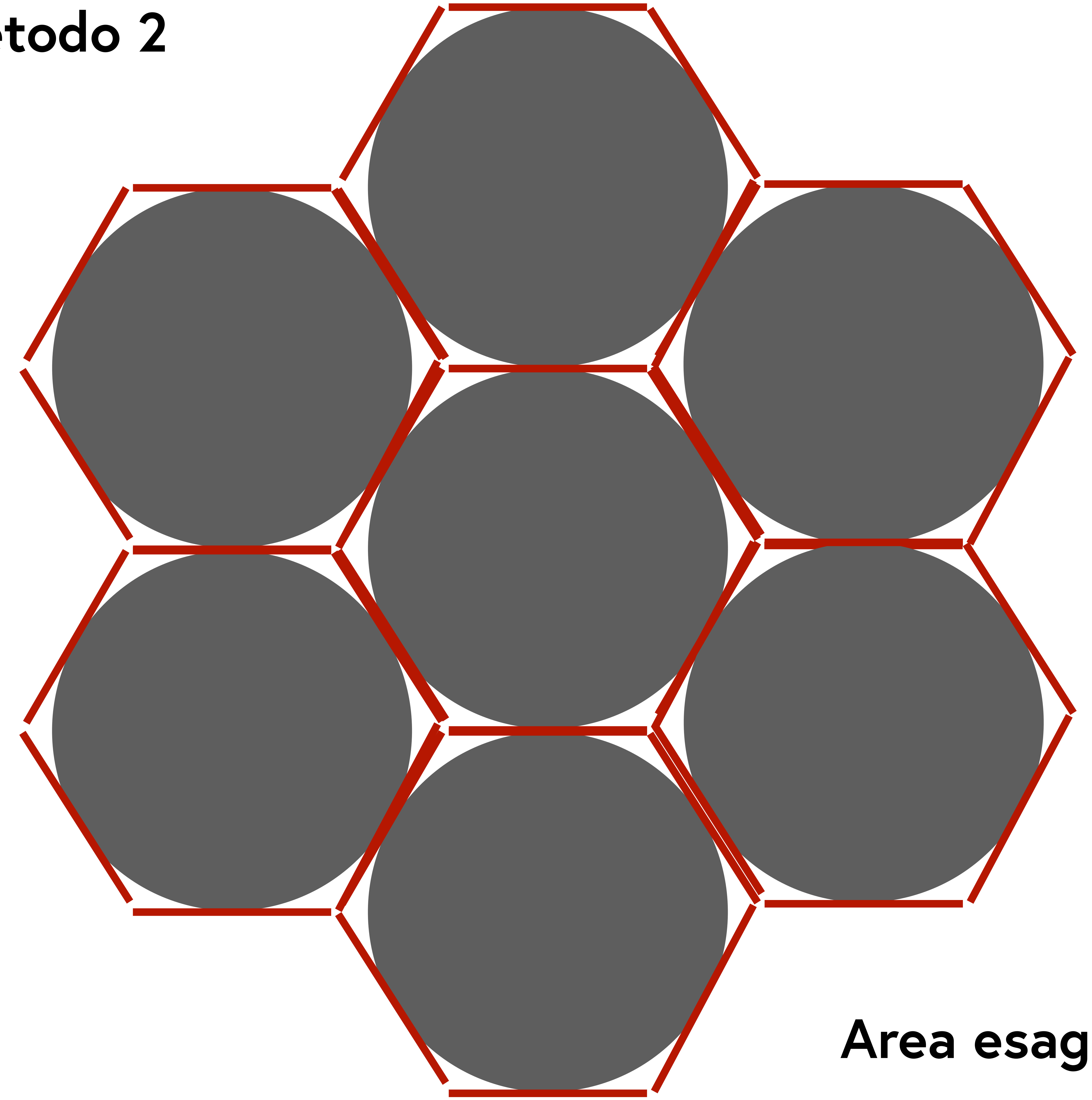
Metodo 2

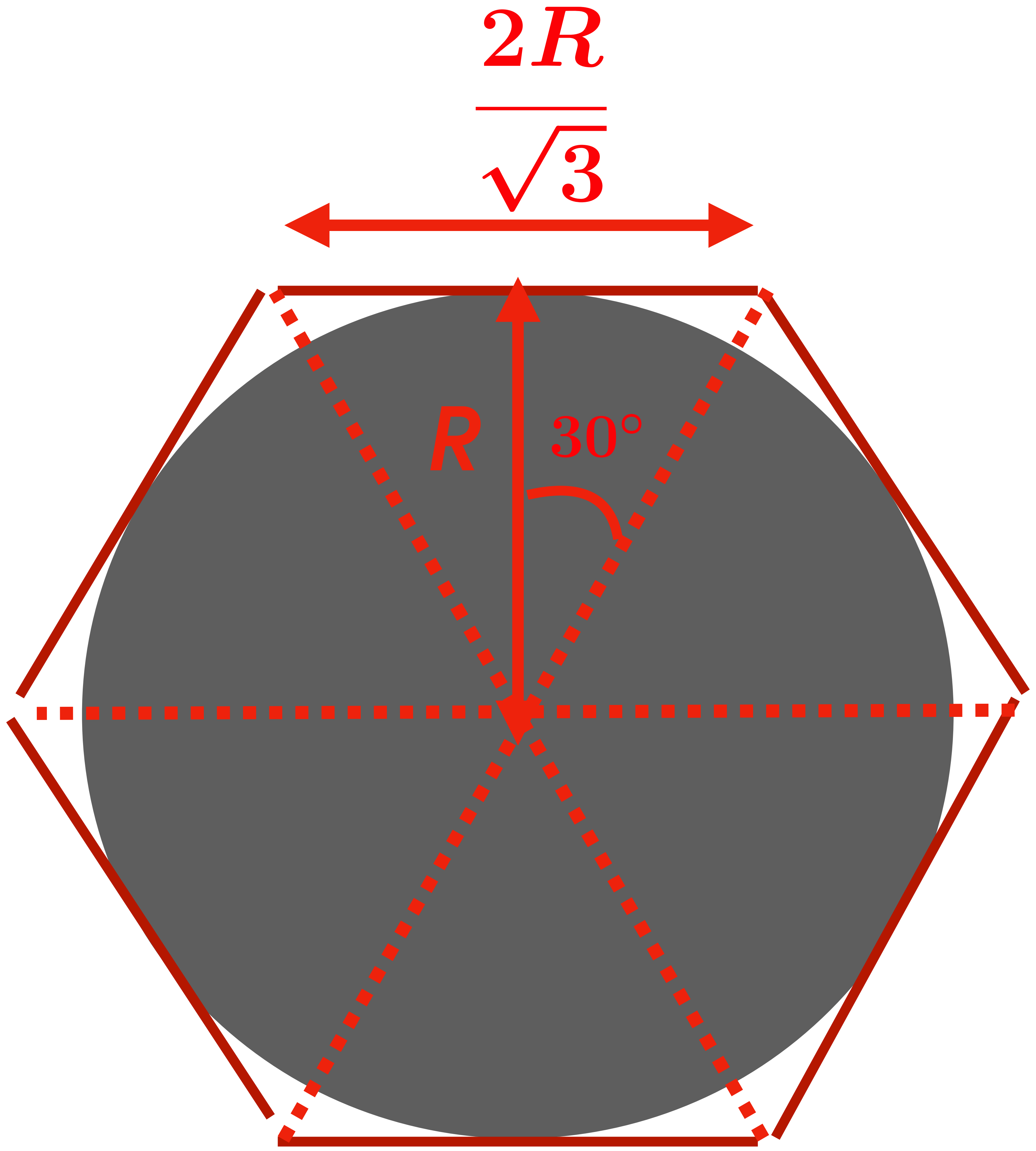




Area esagono:

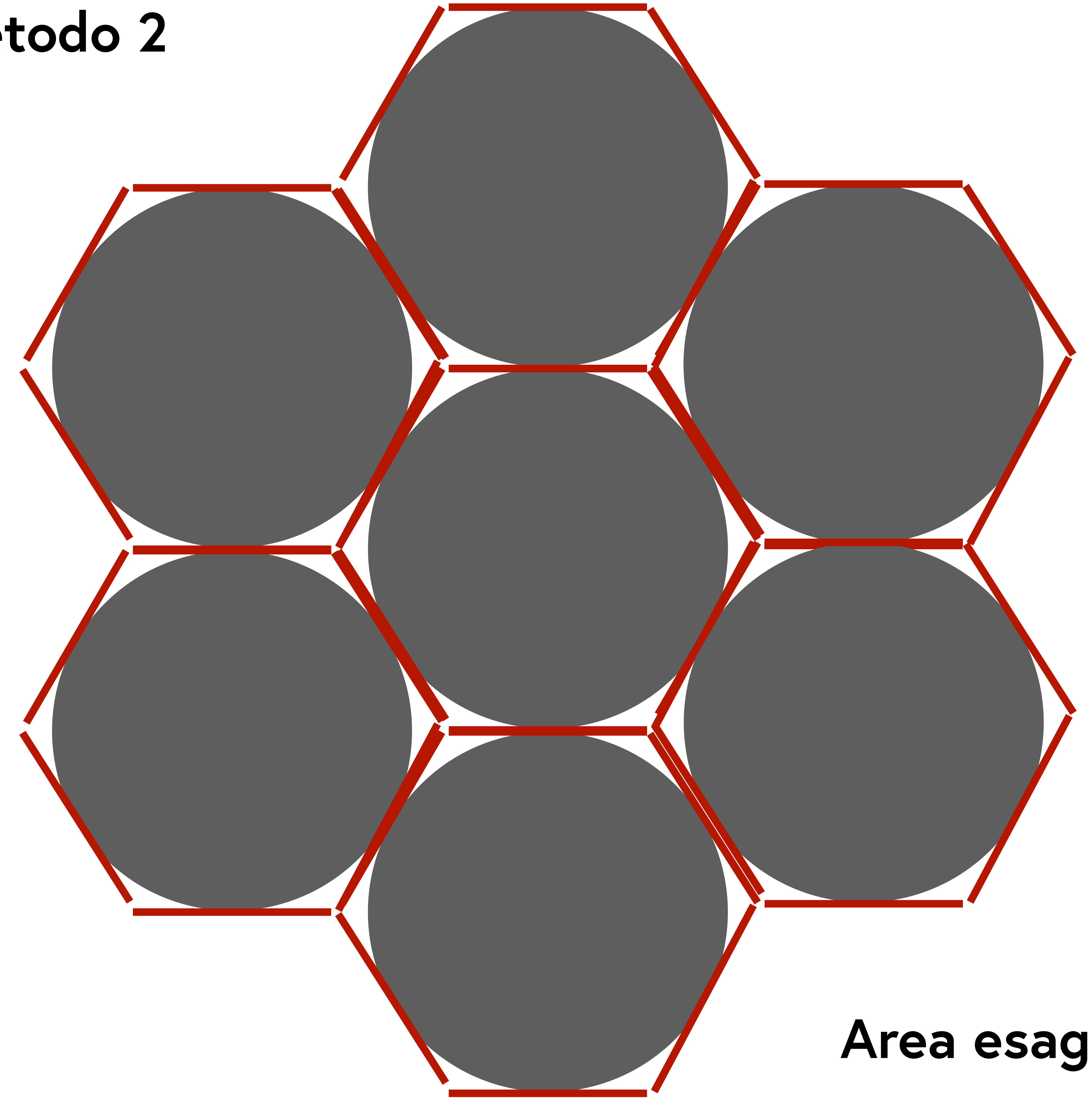
Metodo 2

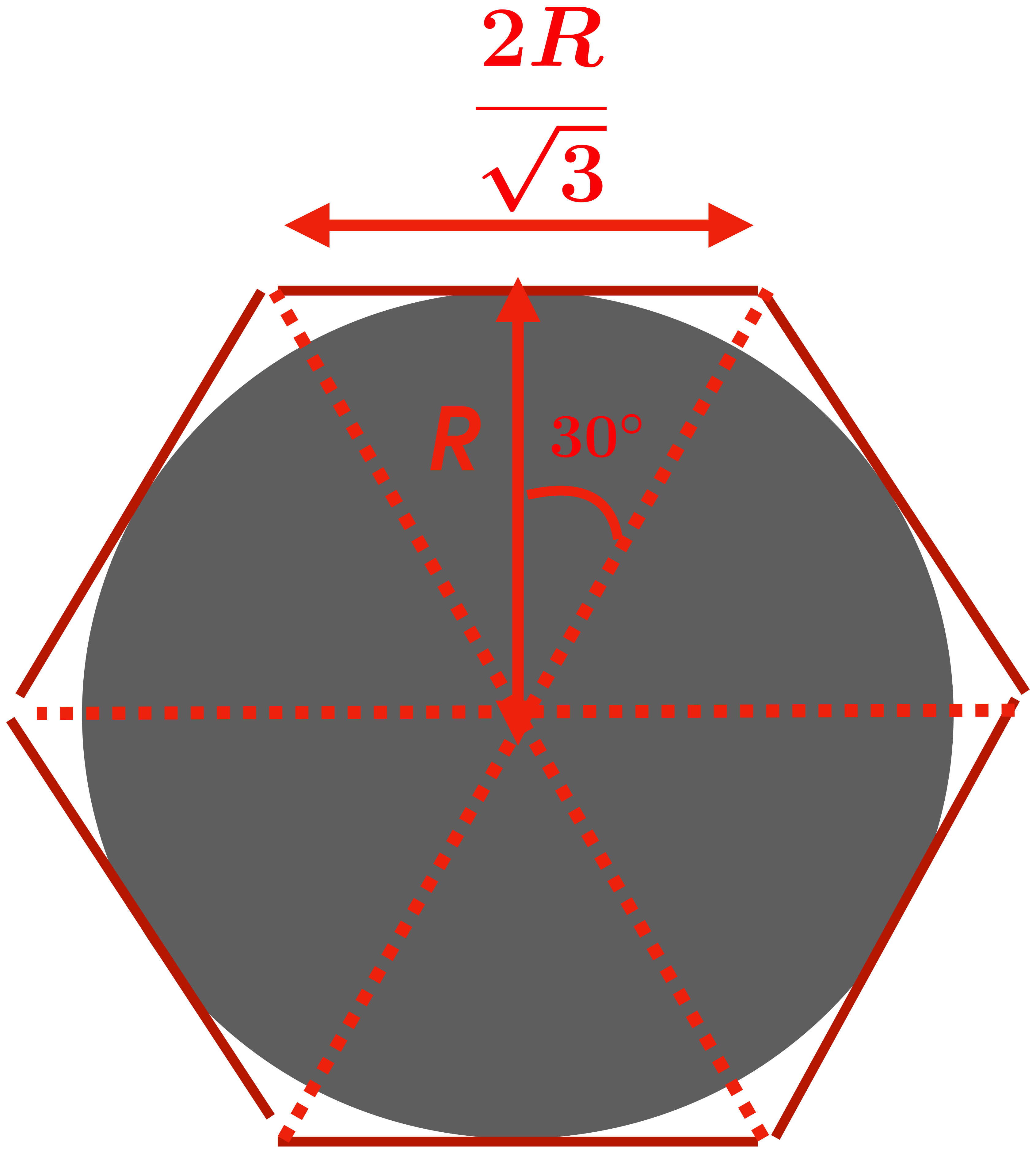




Area esagono:

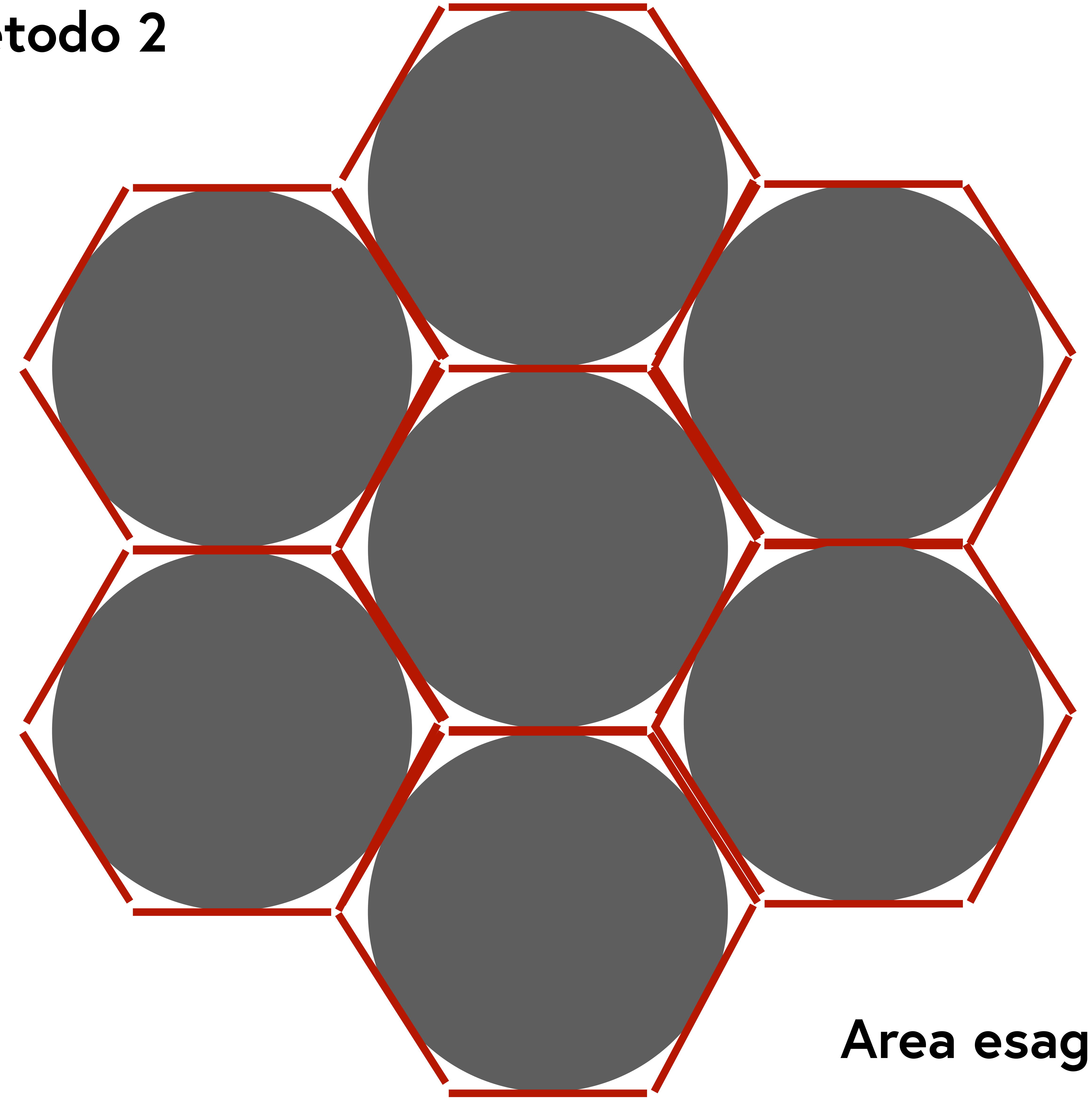
Metodo 2

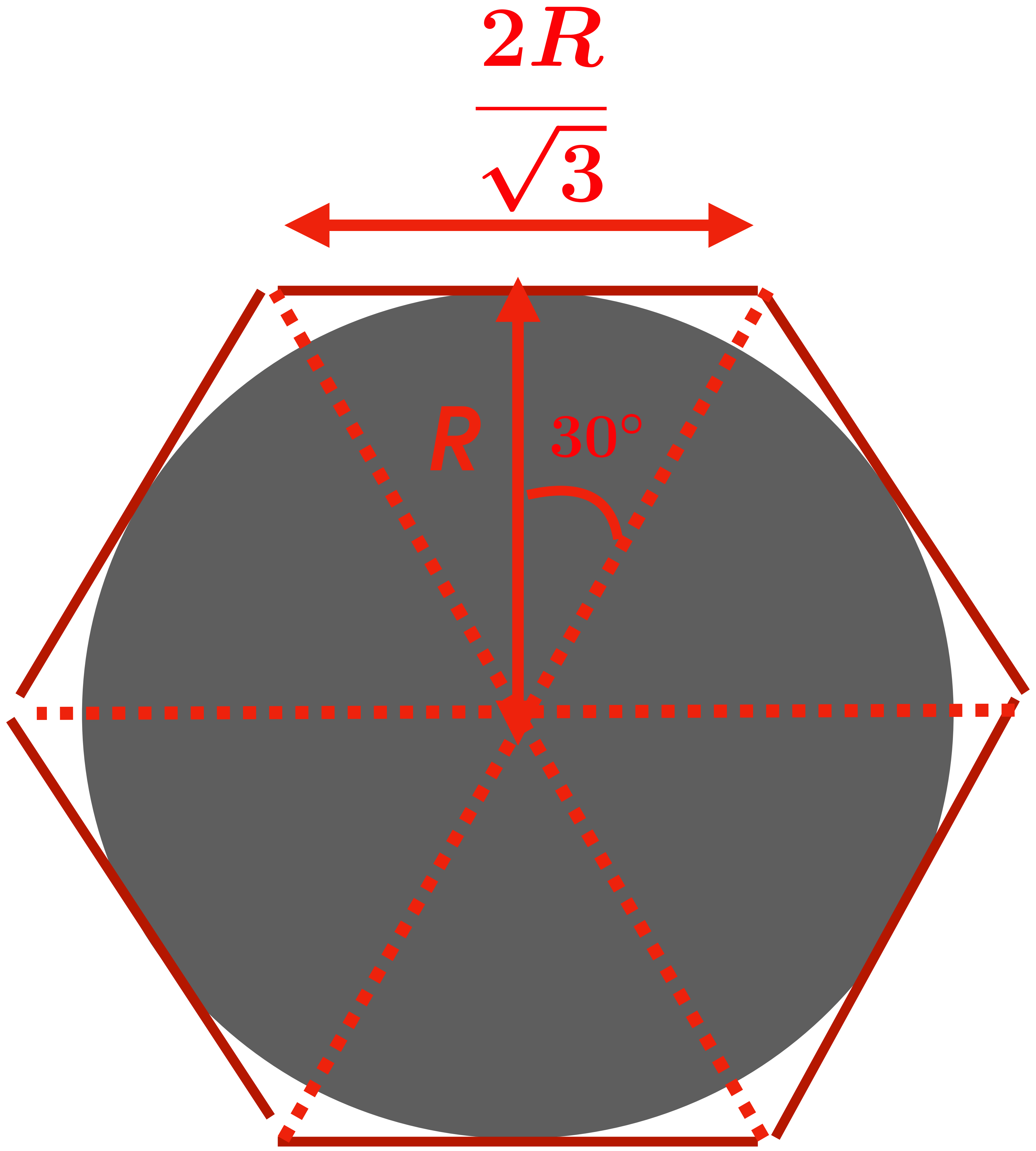




Area esagono: $6 \times \left(\frac{R}{\sqrt{3}} \times R\right) = 2\sqrt{3}R^2$

Metodo 2

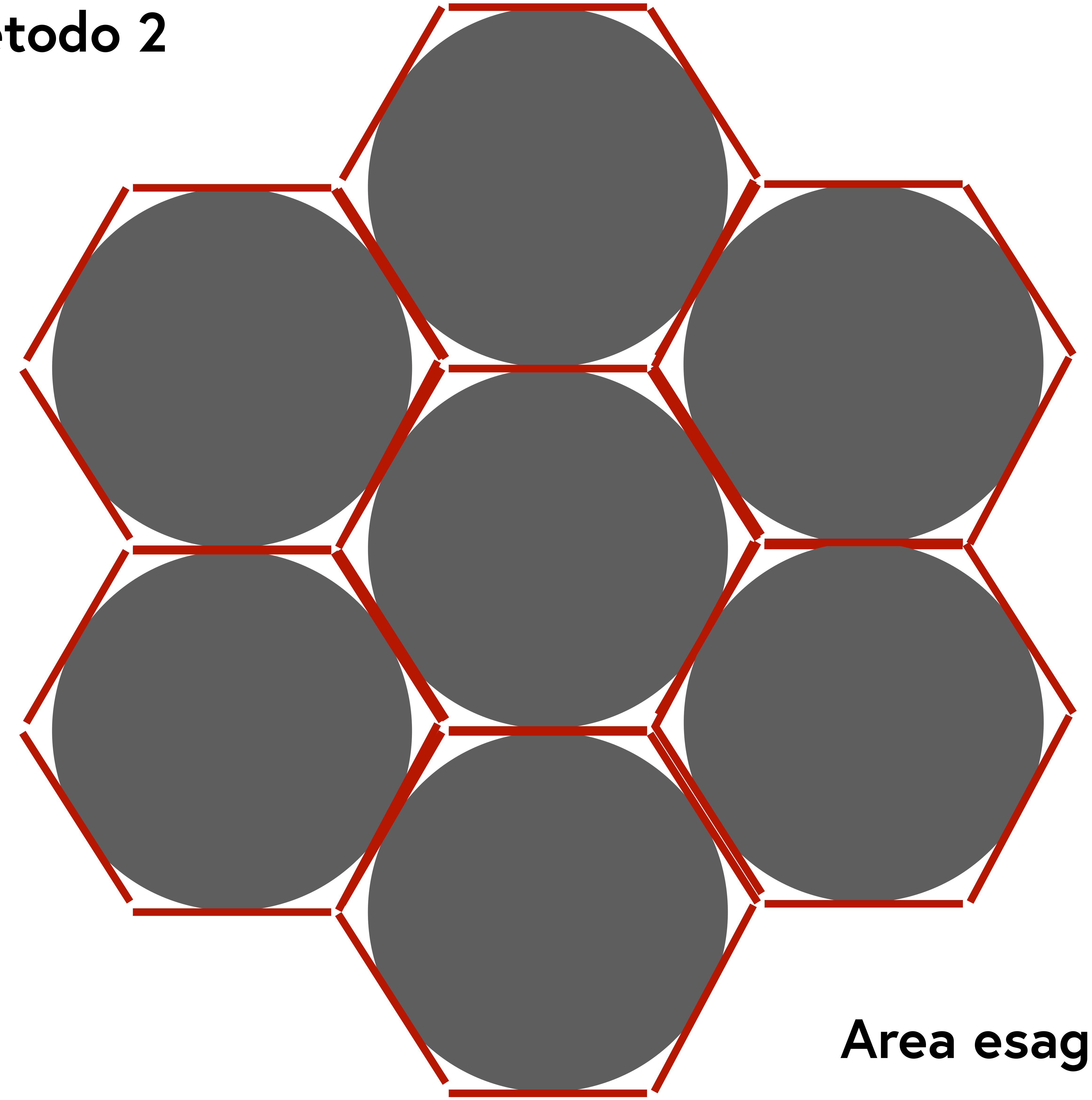


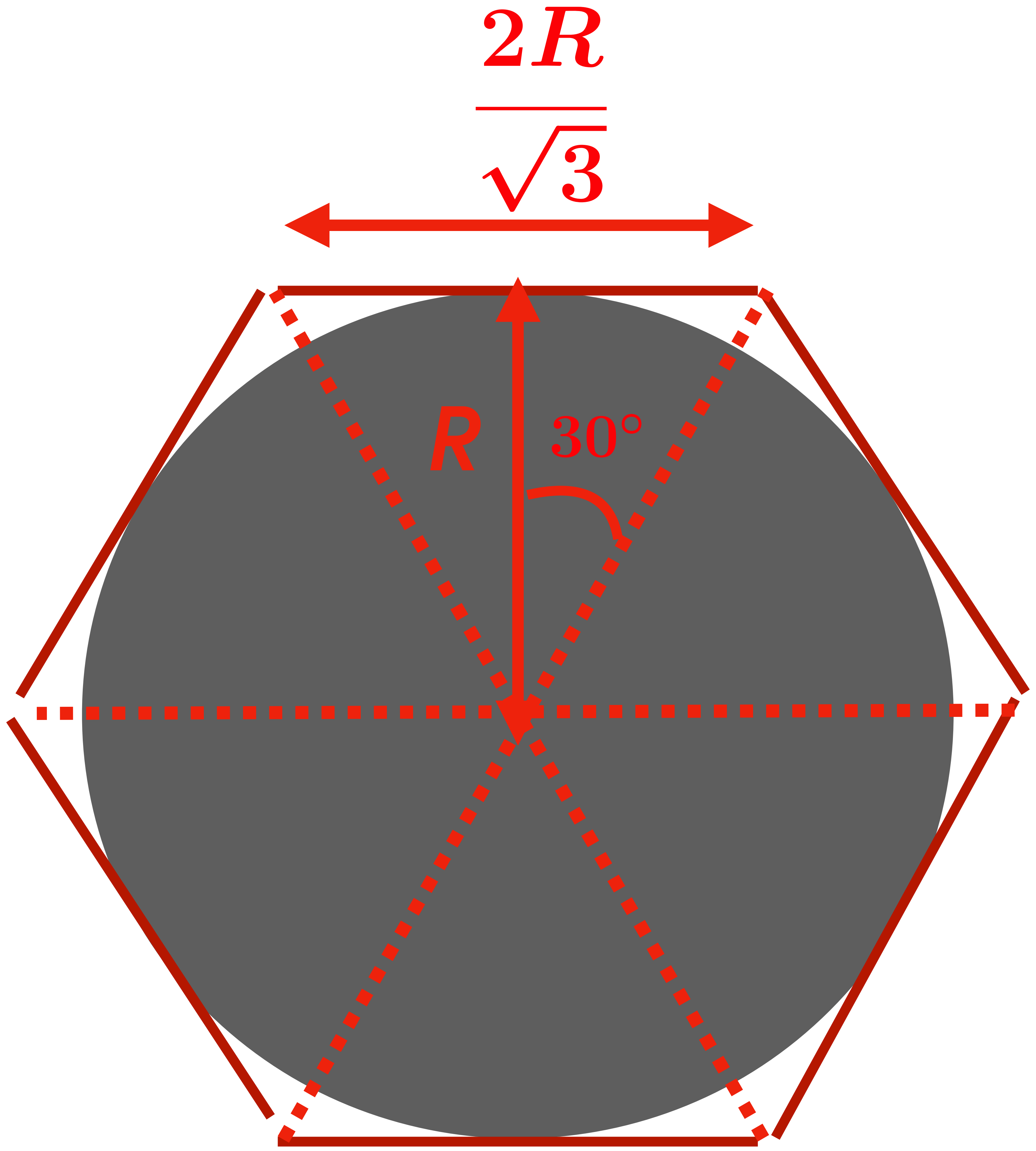


Area esagono: $6 \times \left(\frac{R}{\sqrt{3}} \times R \right) = 2\sqrt{3}R^2$

Percentuale scarto:

Metodo 2

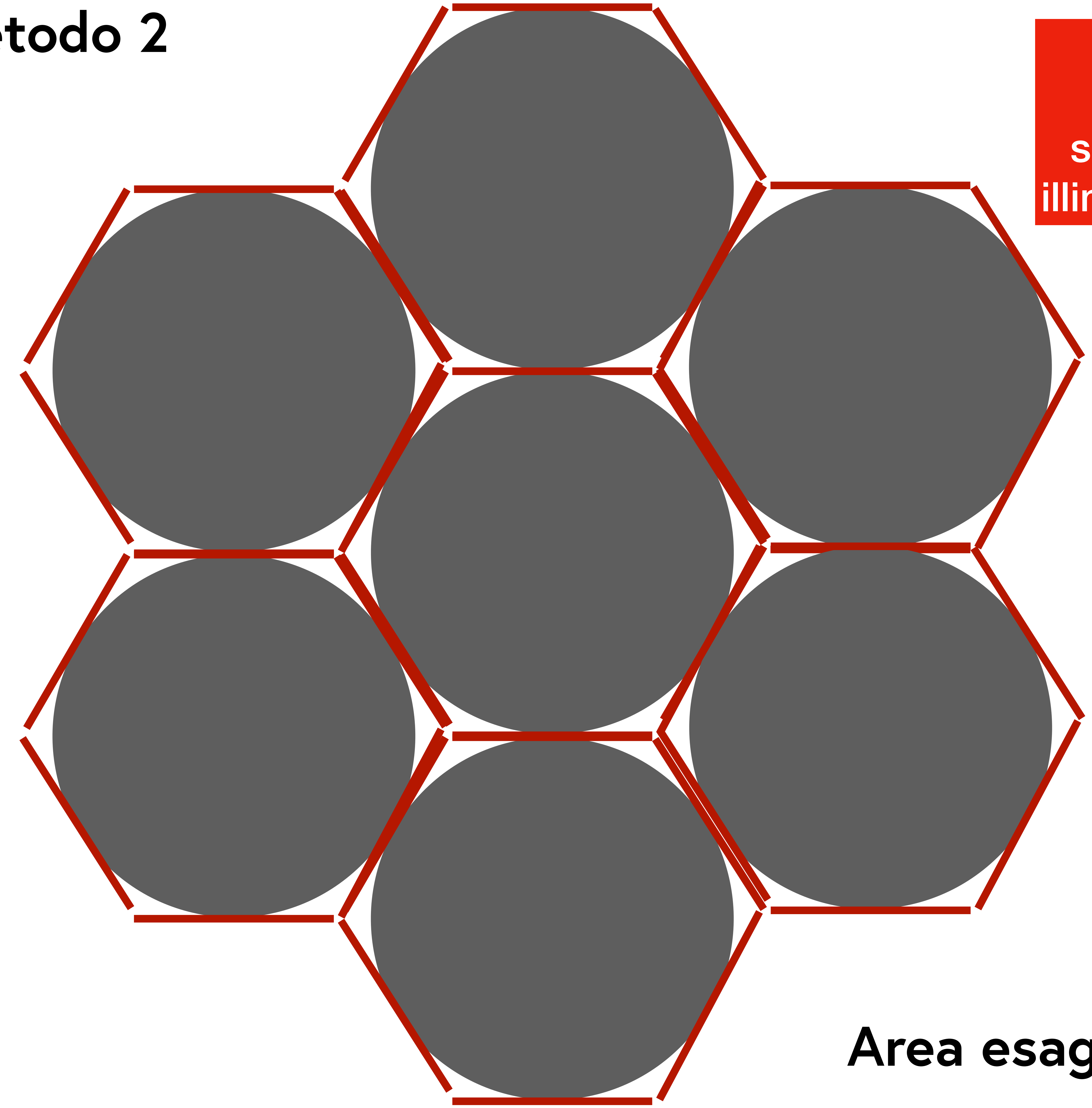


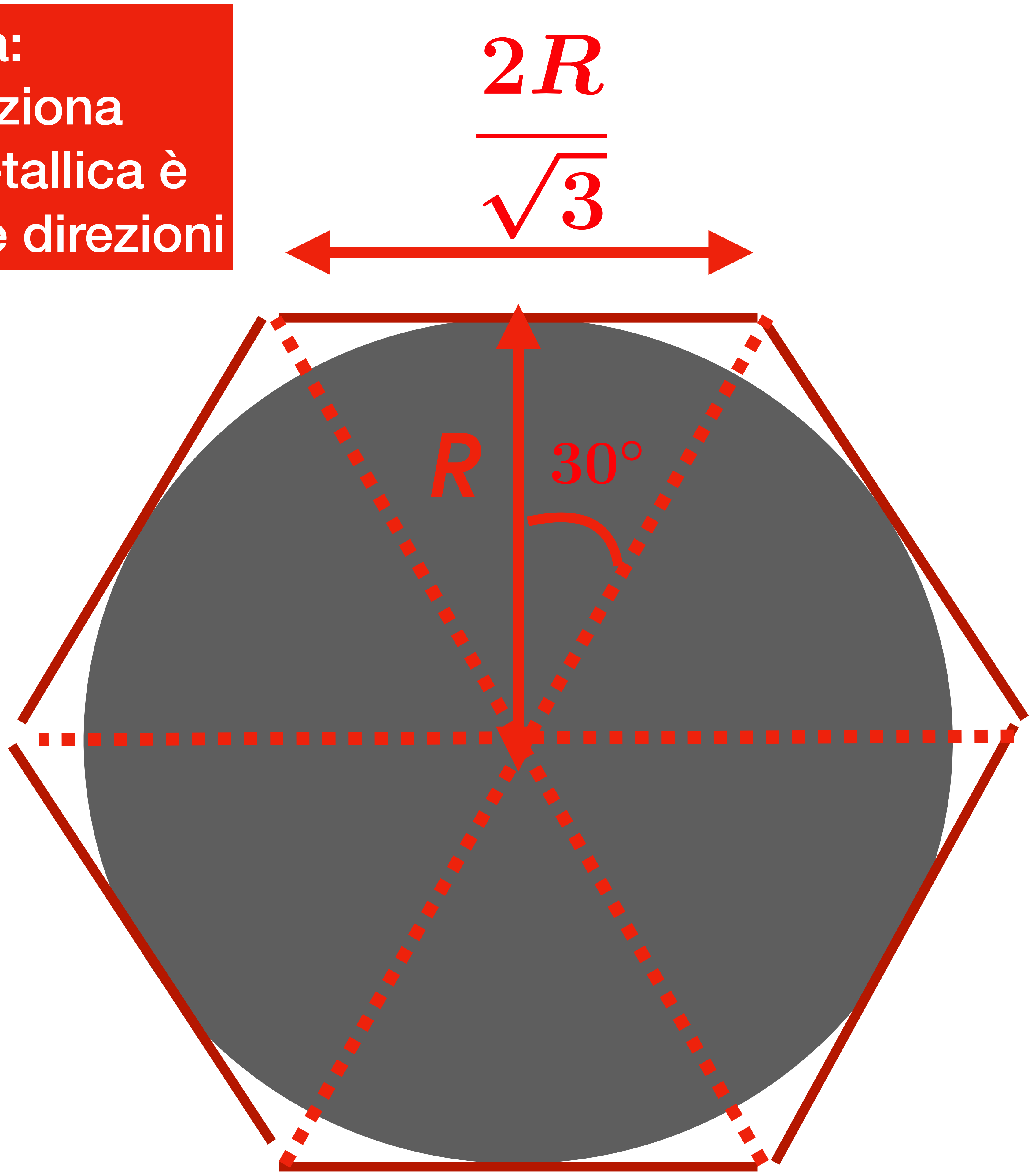


Area esagono: $6 \times \left(\frac{R}{\sqrt{3}} \times R\right) = 2\sqrt{3}R^2$

Percentuale scarto: $\frac{2\sqrt{3}R^2 - \pi R^2}{2\sqrt{3}R^2} = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{2\sqrt{3}}$

Metodo 2





Area esagono: $$6 \times \left(\frac{R}{\sqrt{3}} \times R\right) = 2\sqrt{3}R^2$$

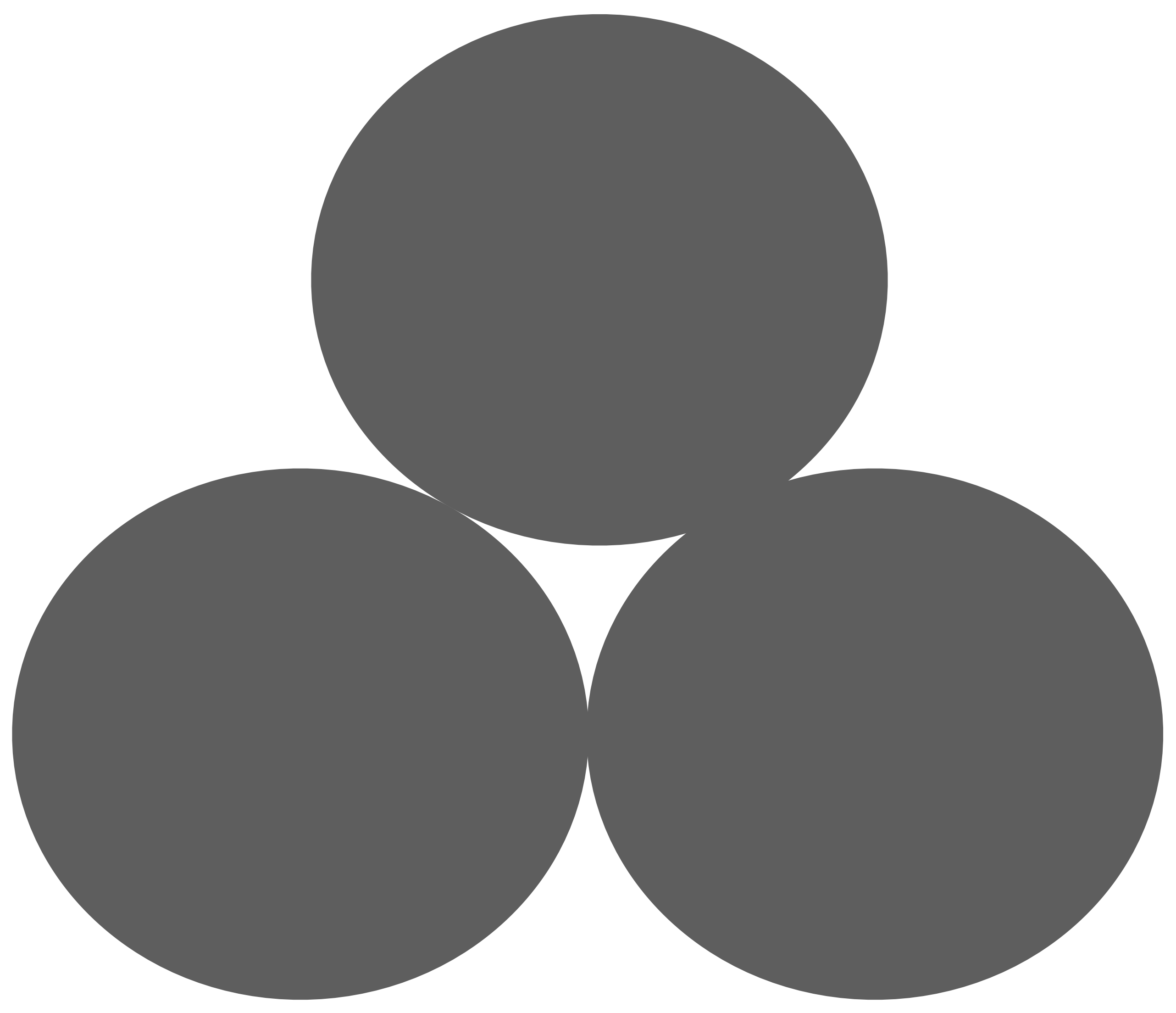
Percentuale scarto: $$\frac{2\sqrt{3}R^2 - \pi R^2}{2\sqrt{3}R^2} = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{2\sqrt{3}} \approx 9.3\%$$

Metodo 3 (industriale)

Metodo 3 (industriale)

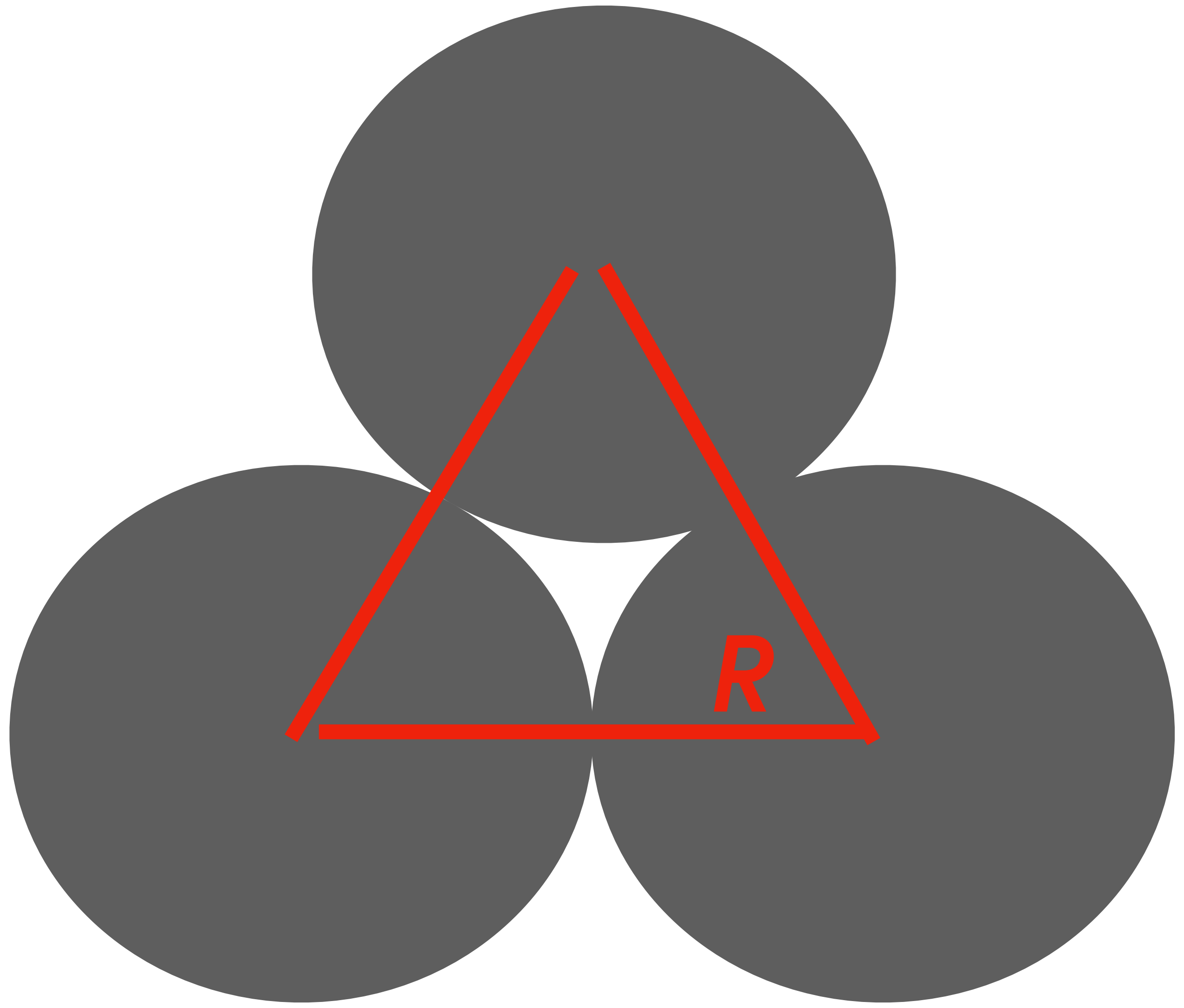
Metodo 3 (industriale)

Metodo 3 (industriale)

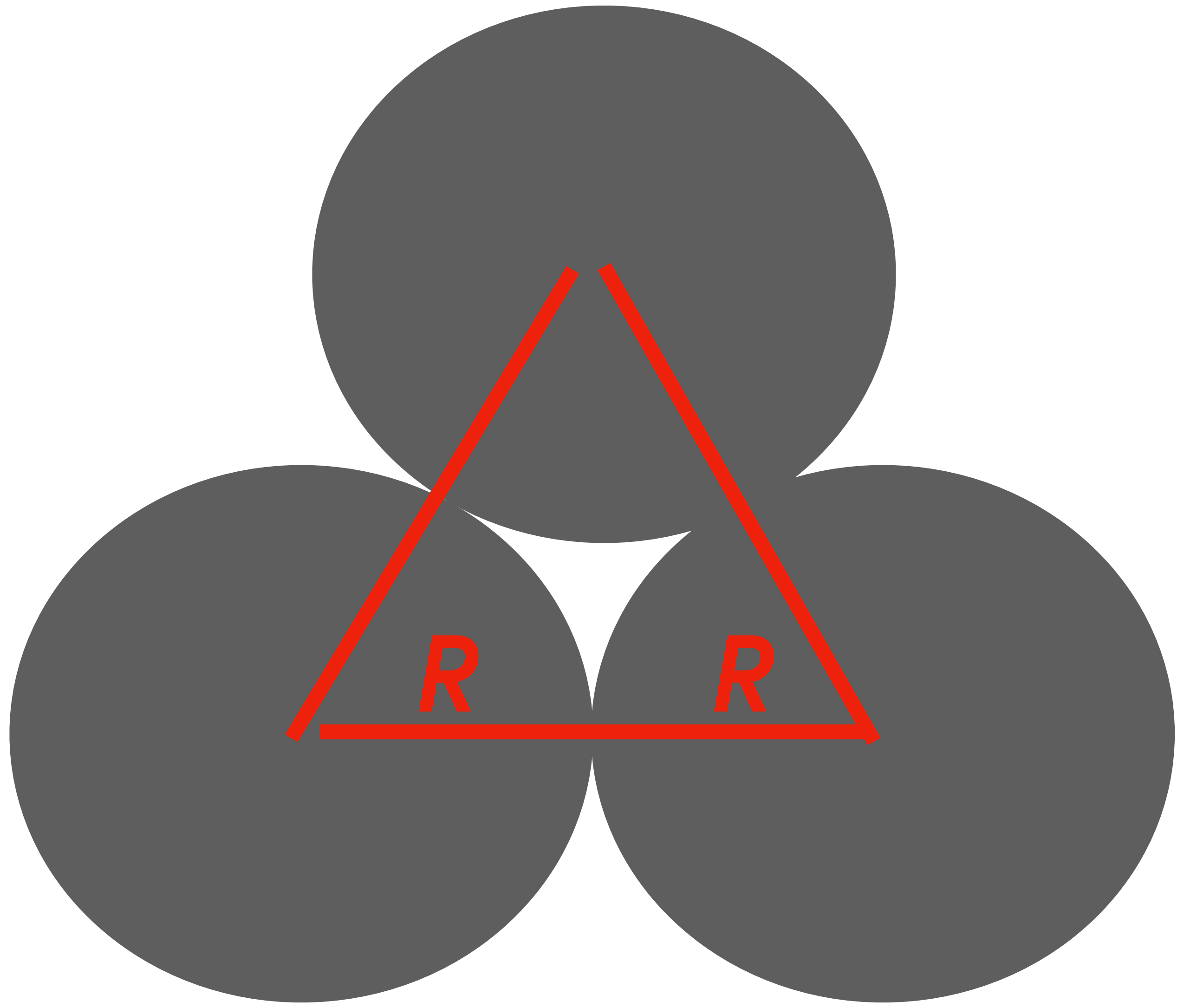


Metodo 3 (industriale)

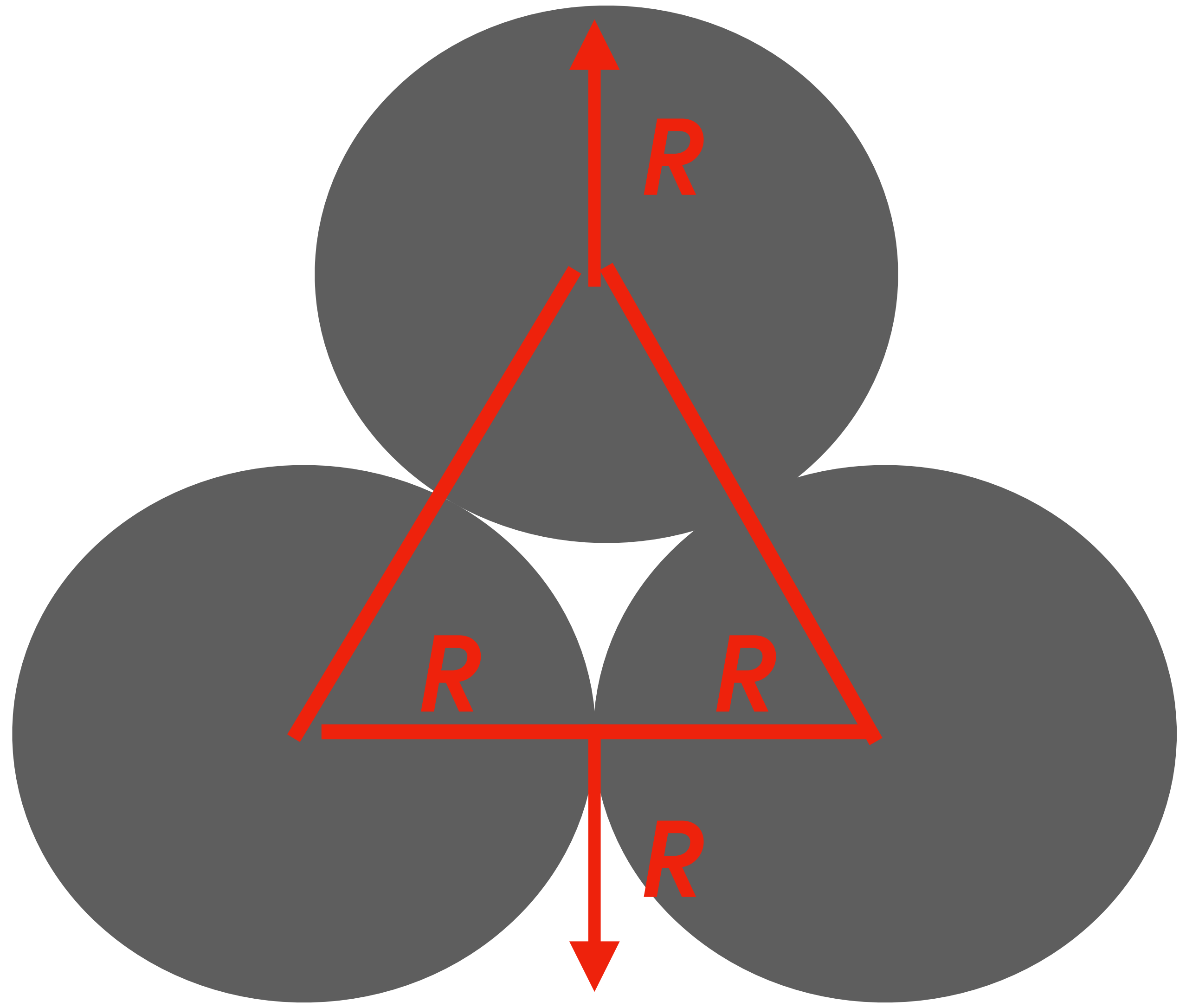
Metodo 3 (industriale)



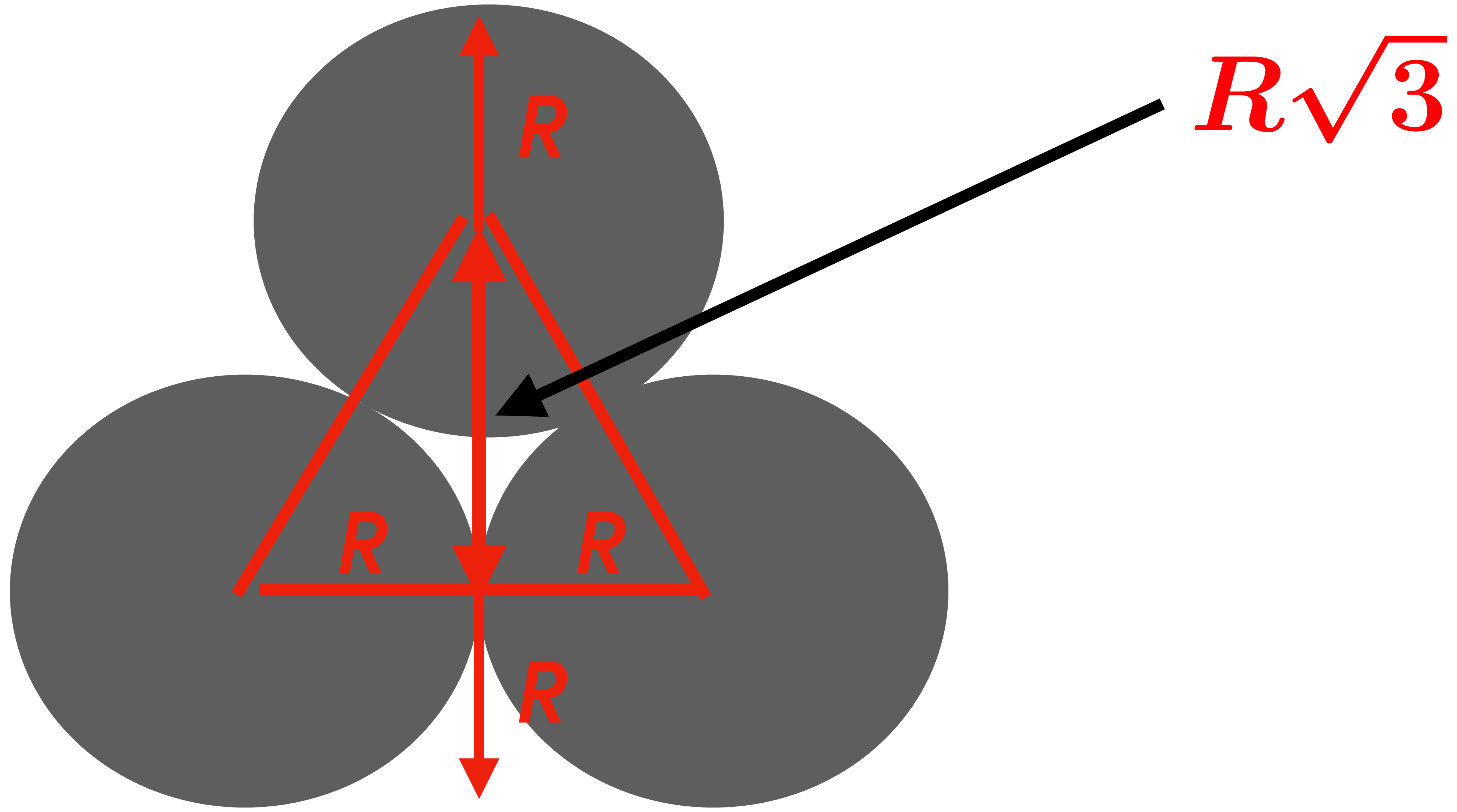
Metodo 3 (industriale)



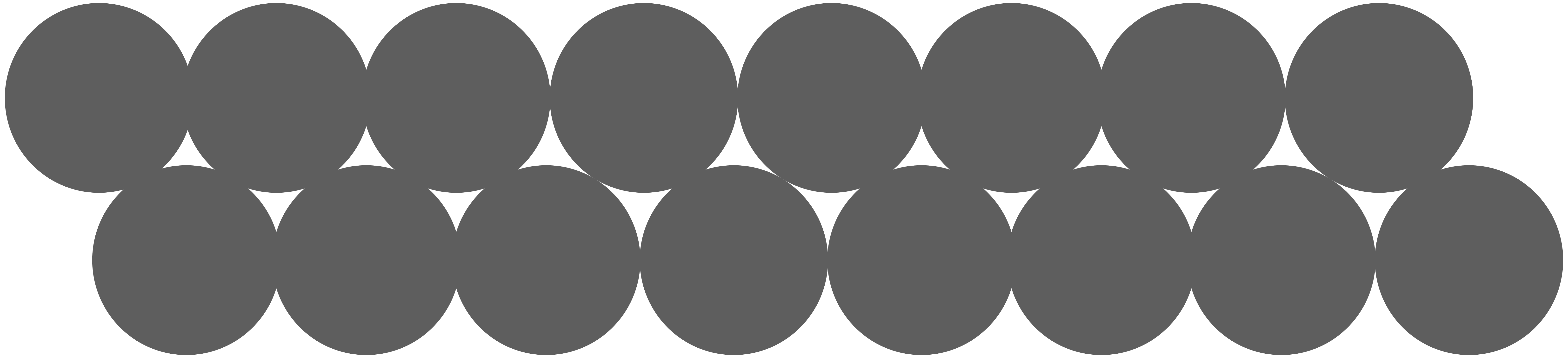
Metodo 3 (industriale)

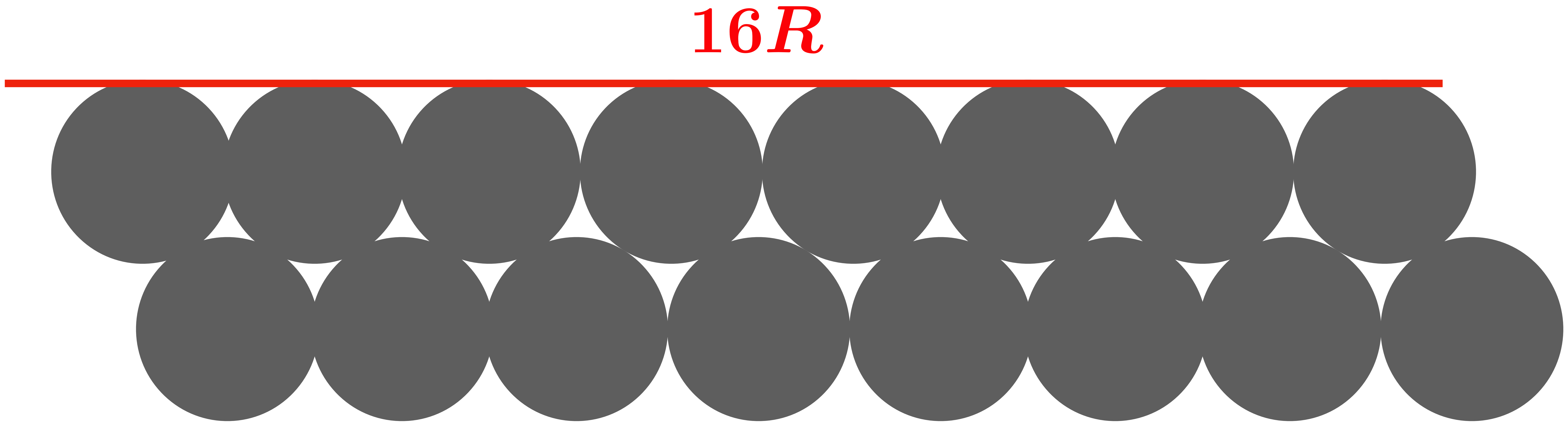


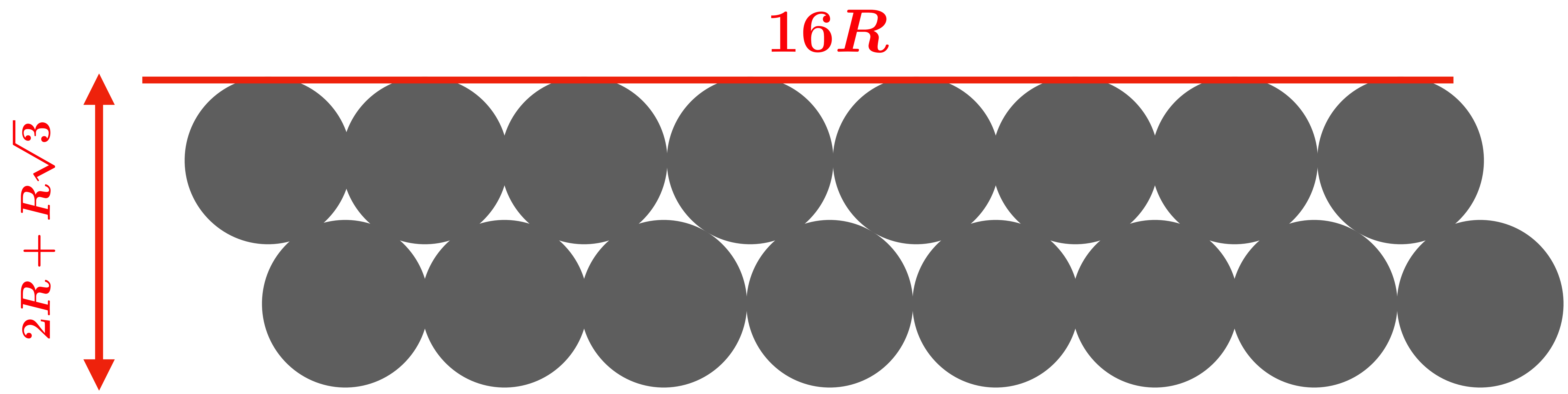
Metodo 3 (industriale)

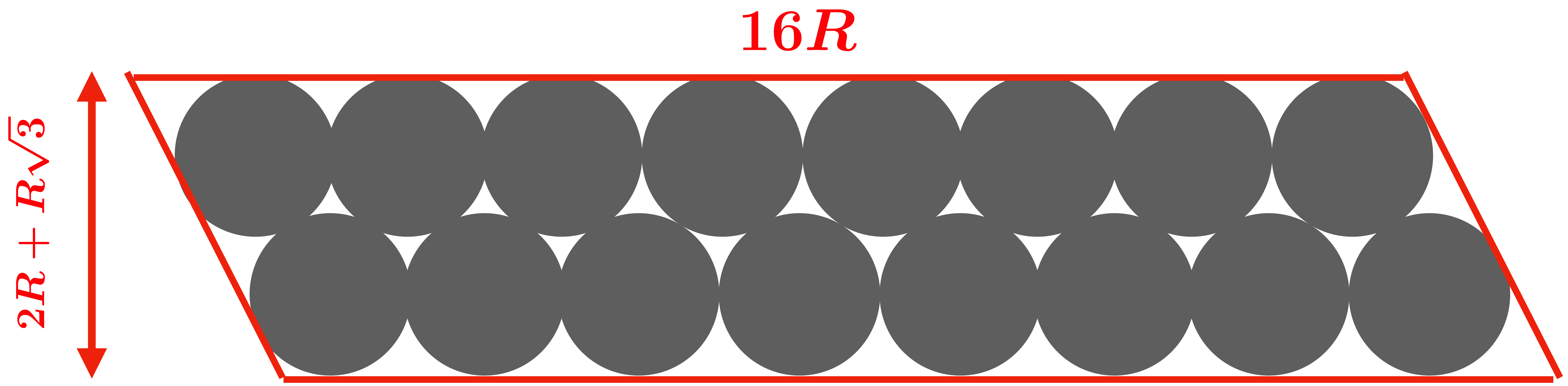


Metodo 3 (industriale)

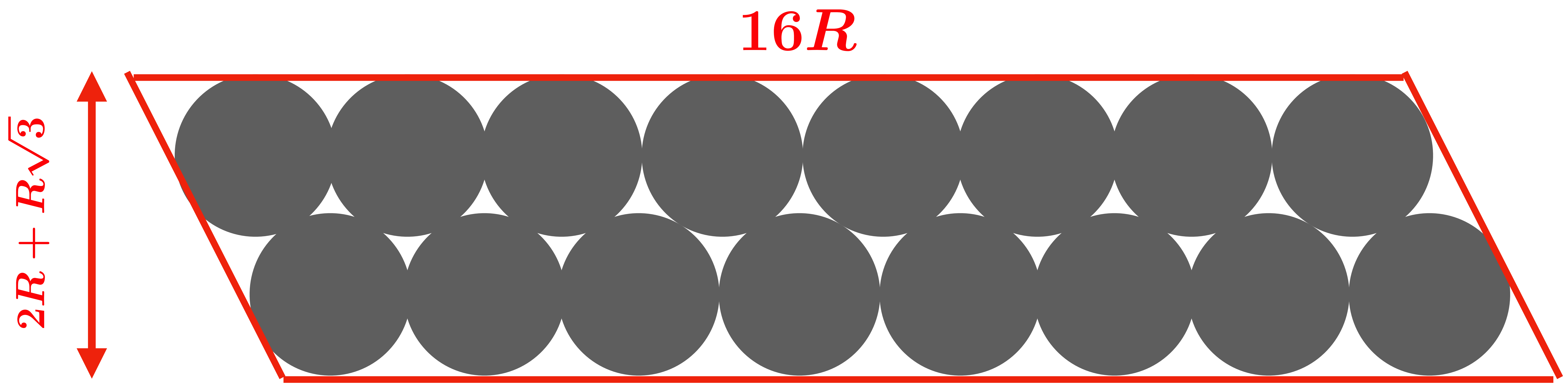



$16R$

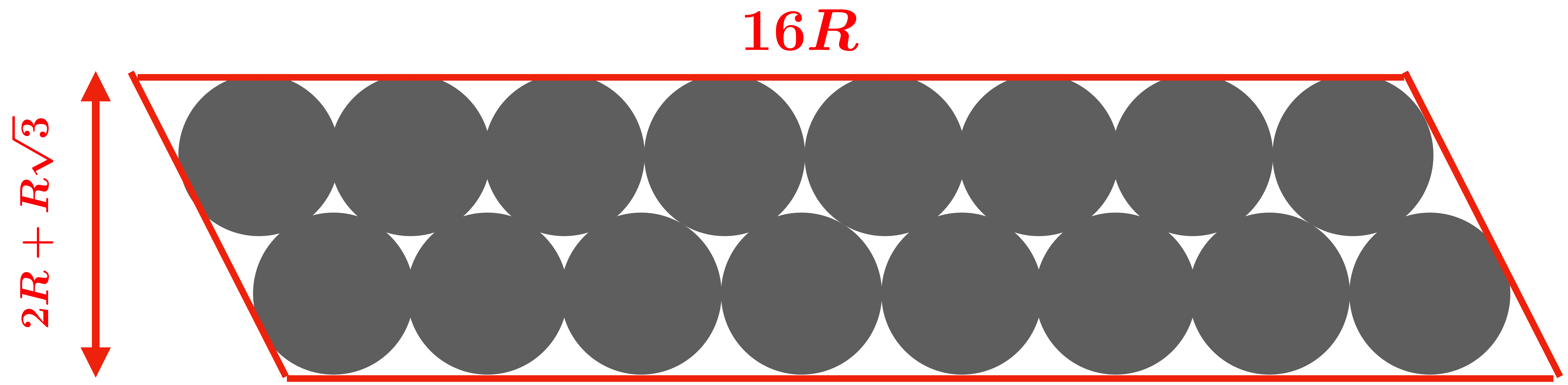

$16R$
$2R + R\sqrt{3}$



$16R$
$2R + R\sqrt{3}$

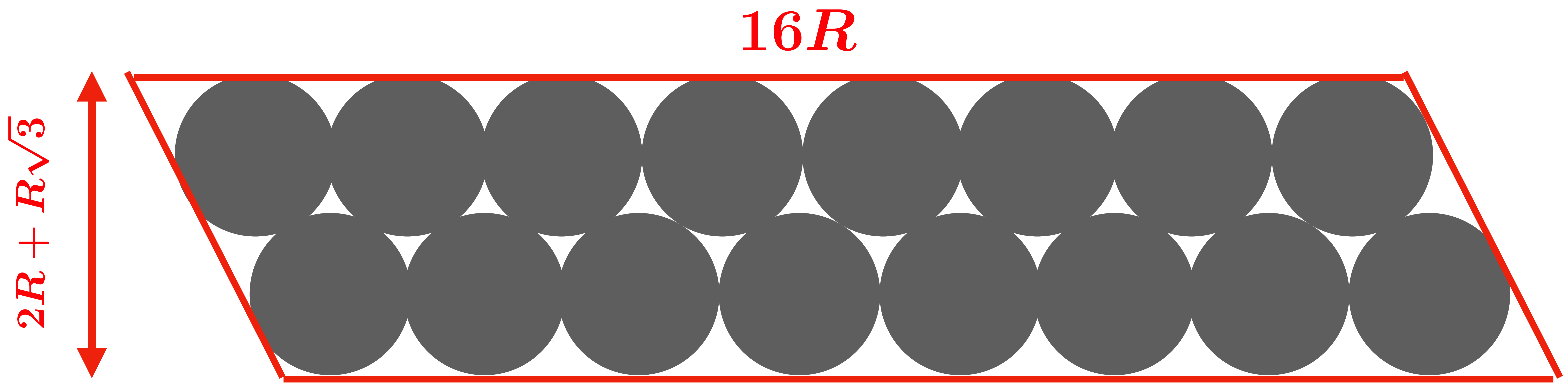


Area: $(2R + R\sqrt{3}) \times 16R = 16R^2\left(\sqrt{3} + 2\right)$



Area: $(2R + R\sqrt{3}) \times 16R = 16R^2\left(\sqrt{3}+2\right)$

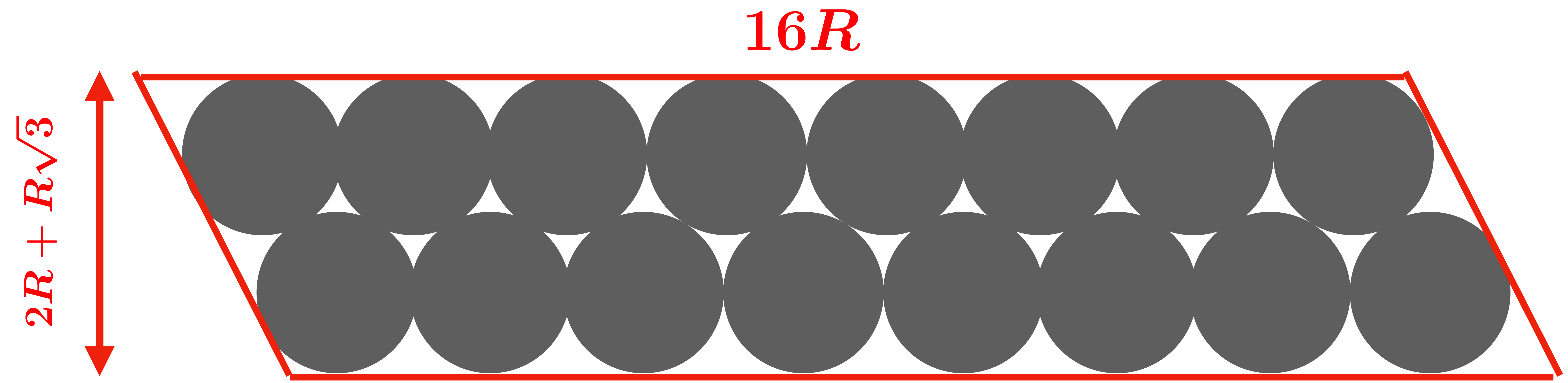
Percentuale scarto :



Area: $(2R + R\sqrt{3}) \times 16R = 16R^2\left(\sqrt{3} + 2\right)$

Percentuale scarto :

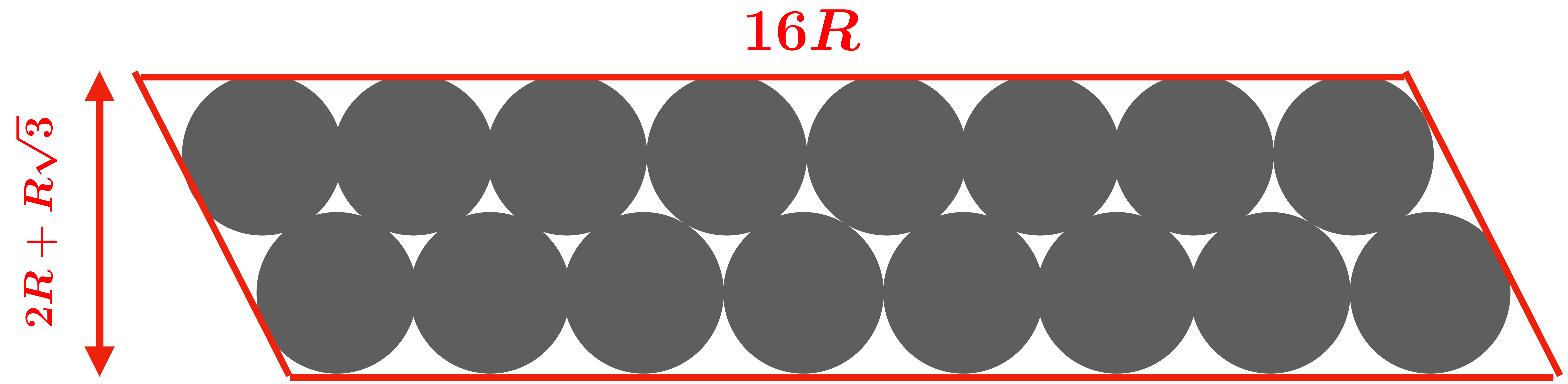
$$\frac{(2R + R\sqrt{3}) \times (16R) - 16\pi R^2}{(2R + R\sqrt{3}) \times (16R)}$$



Area: $(2R + R\sqrt{3}) \times 16R = 16R^2\left(\sqrt{3} + 2\right)$

Percentuale scarto :

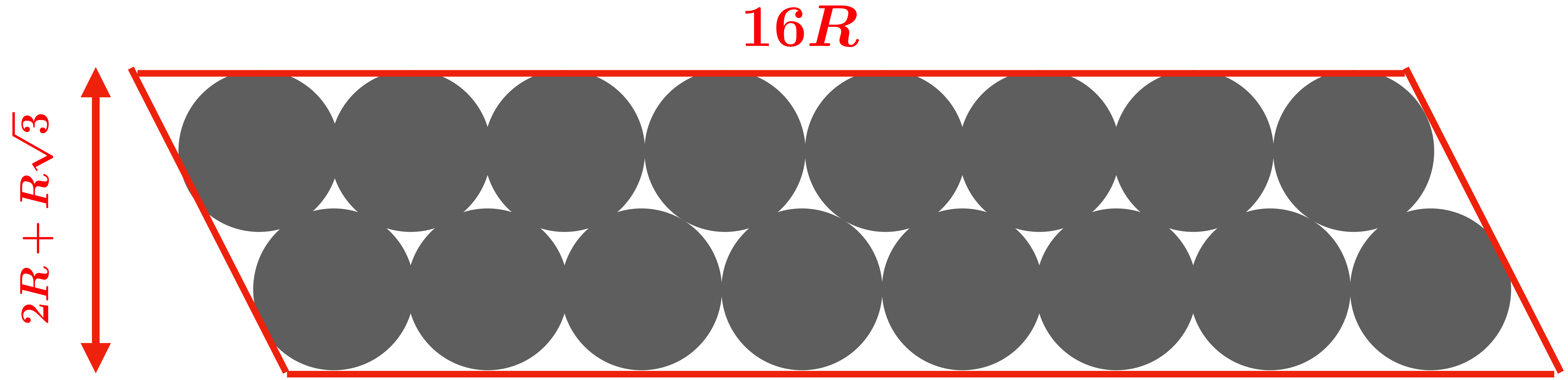
$$\frac{(2\cancel{R} + \cancel{R}\sqrt{3}) \times (16\cancel{R}) - 16\pi \cancel{R^2}}{(2\cancel{R} + \cancel{R}\sqrt{3}) \times (16\cancel{R})}$$



Area: $(2R + R\sqrt{3}) \times 16R = 16R^2\left(\sqrt{3}+2\right)$

Percentuale scarto :

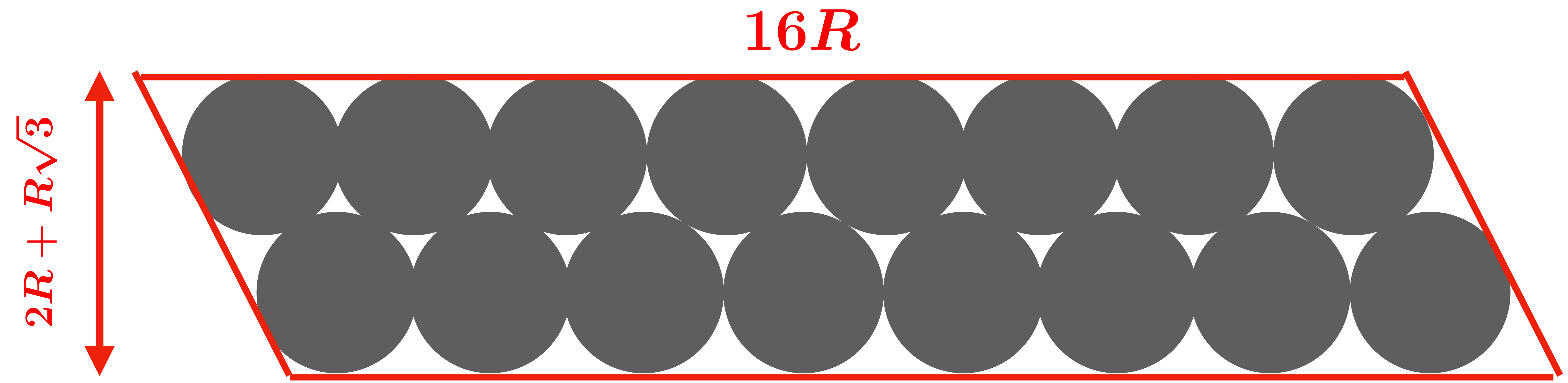
$$\frac{(2\cancel{R} + \cancel{R}\sqrt{3}) \times (1\cancel{6}\cancel{R}) - \cancel{1}6\pi \cancel{R^2}}{(2\cancel{R} + \cancel{R}\sqrt{3}) \times (1\cancel{6}\cancel{R})}$$



Area: $(2R + R\sqrt{3}) \times 16R = 16R^2\left(\sqrt{3} + 2\right)$

Percentuale scarto :

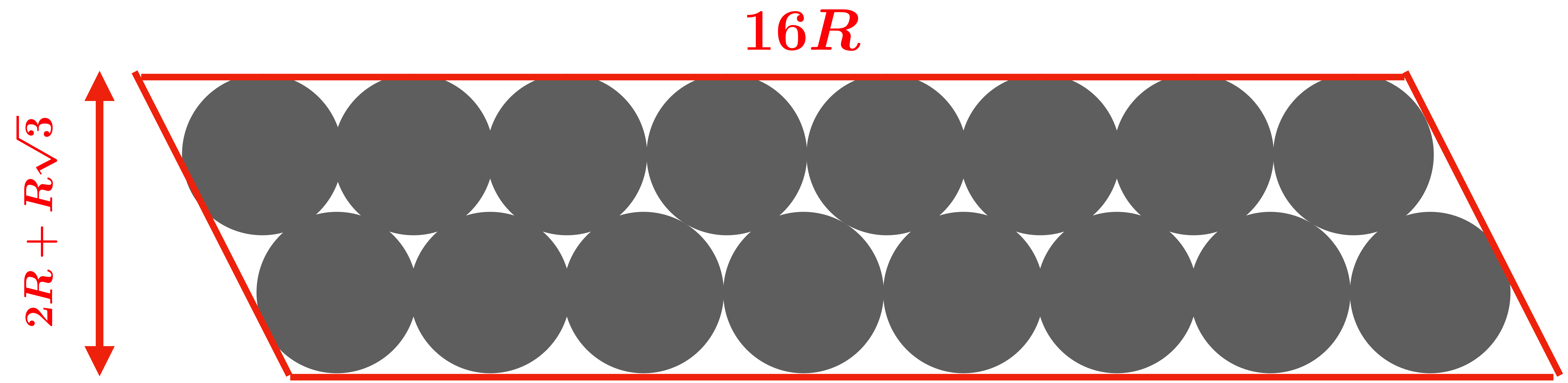
$$\frac{(2\cancel{R} + \cancel{R}\sqrt{3}) \times (1\cancel{6}\cancel{R}) - \cancel{16}\pi \cancel{R^2}}{(2\cancel{R} + \cancel{R}\sqrt{3}) \times (1\cancel{6}\cancel{R})} = \frac{(2 + \sqrt{3}) - \pi}{2 + \sqrt{3}}$$



Area: $(2R + R\sqrt{3}) \times 16R = 16R^2\left(\sqrt{3} + 2\right)$

Percentuale scarto :

$$\frac{(2\cancel{R} + \cancel{R}\sqrt{3}) \times (1\cancel{6}\cancel{R}) - 1\cancel{6}\pi \cancel{R^2}}{(2\cancel{R} + \cancel{R}\sqrt{3}) \times (1\cancel{6}\cancel{R})} = \frac{(2+\sqrt{3}) - \pi}{2+\sqrt{3}} \approx 15.8\%$$



Area: $(2R + R\sqrt{3}) \times 16R = 16R^2\left(\sqrt{3} + 2\right)$

Percentuale scarto :

$$\frac{(2\cancel{R} + \cancel{R}\sqrt{3}) \times (\cancel{16}\cancel{R}) - \cancel{16}\pi \cancel{R^2}}{(2\cancel{R} + \cancel{R}\sqrt{3}) \times (\cancel{16}\cancel{R})} = \frac{(2 + \sqrt{3}) - \pi}{2 + \sqrt{3}} \approx 15.8\%$$

Superficie di metallo per 1 disco: $\boxed{R^2\left(\sqrt{3} + 2\right)}$

$\approx 3.73R^2$

Gli scarti nella produzione dei dischi: riassunto

Metodo 1: percentuale di scarto 21.5%

Metodo 2: <10% ma serve larghezza e lunghezza illimitata

Metodo 3: 15.8% ed è compatibile con il sistema di produzione

per fare un disco si usa una superficie di $(2+\sqrt{3})R^2$

Una nuova funzione da studiare

Area effettivamente utilizzata per la confezione di caffè:

Una nuova funzione da studiare

Area effettivamente utilizzata per la confezione di caffè:

Superficie cilindro laterale + superficie (scarto incluso) per base e coperchio

Una nuova funzione da studiare

Area effettivamente utilizzata per la confezione di caffè:

Superficie cilindro laterale + superficie (scarto incluso) per base e coperchio

$$(2\pi R)h = (2\pi R)\frac{880}{\pi R^2} = \frac{1760}{R}$$

Una nuova funzione da studiare

Area effettivamente utilizzata per la confezione di caffè:

Superficie cilindro laterale + superficie (scarto incluso) per base e coperchio

$$(2\pi R)h = (2\pi R)\frac{880}{\pi R^2} = \frac{1760}{R} \qquad + \qquad 2R^2(\sqrt{3}+2)$$

Una nuova funzione da studiare

Area effettivamente utilizzata per la confezione di caffè:

Superficie cilindro laterale + superficie (scarto incluso) per base e coperchio

$$(2\pi R)h = (2\pi R)\frac{880}{\pi R^2} = \frac{1760}{R} \qquad + \qquad 2R^2(\sqrt{3}+2)$$

$$\boxed{g(R) = \frac{1760}{R} + 2R^2(\sqrt{3}+2)}$$

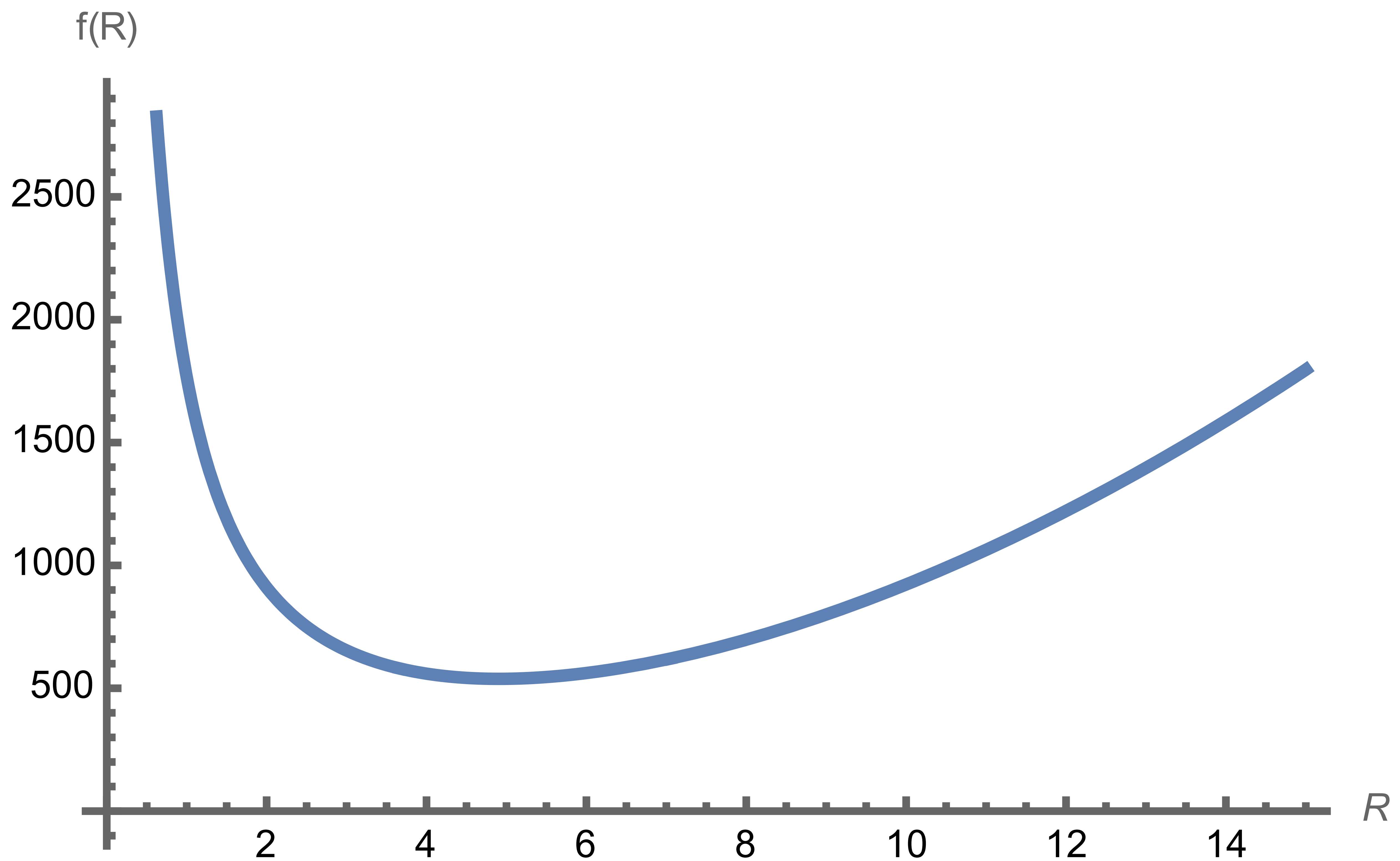
$$g(R) = \frac{1760}{R} + 2R^2(\sqrt{3} + 2)$$

$$g(R) = \frac{1760}{R} + 2R^2(\sqrt{3} + 2)$$

Ricordiamo: è la superficie di metallo
utilizzata per una scatola cilindrica
(SCARTO INCLUSO) di
raggio R e volume fissato pari a 880 cm^3

$$g(R) = \frac{1760}{R} + 2R^2(\sqrt{3} + 2)$$

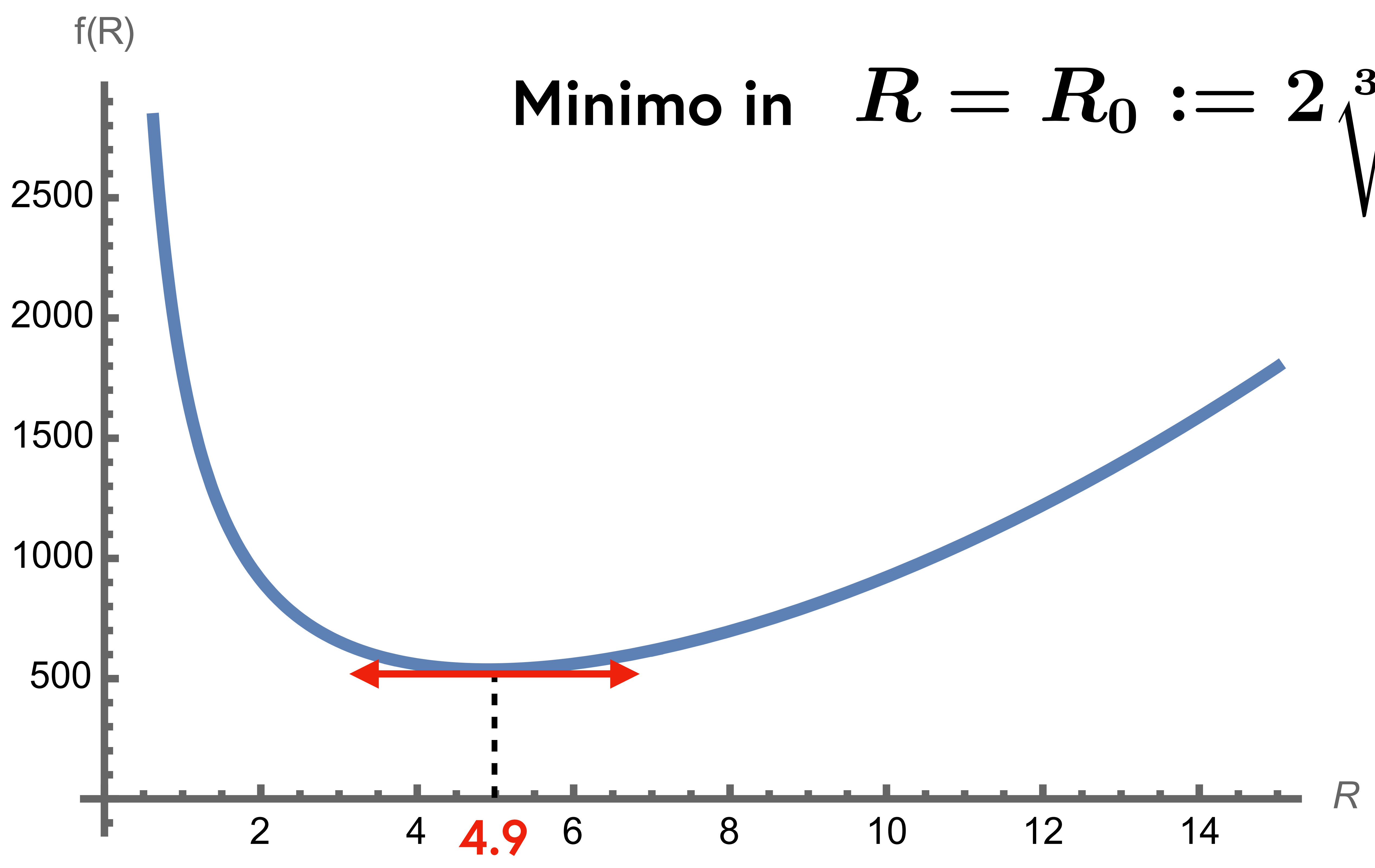
Ricordiamo: è la superficie di metallo utilizzata per una scatola cilindrica (SCARTO INCLUSO) di raggio R e volume fissato pari a 880 cm^3



$$g(R) = \frac{1760}{R} + 2R^2(\sqrt{3}+2)$$

Ricordiamo: è la superficie di metallo utilizzata per una scatola cilindrica (SCARTO INCLUSO) di raggio R e volume fissato pari a 880 cm³

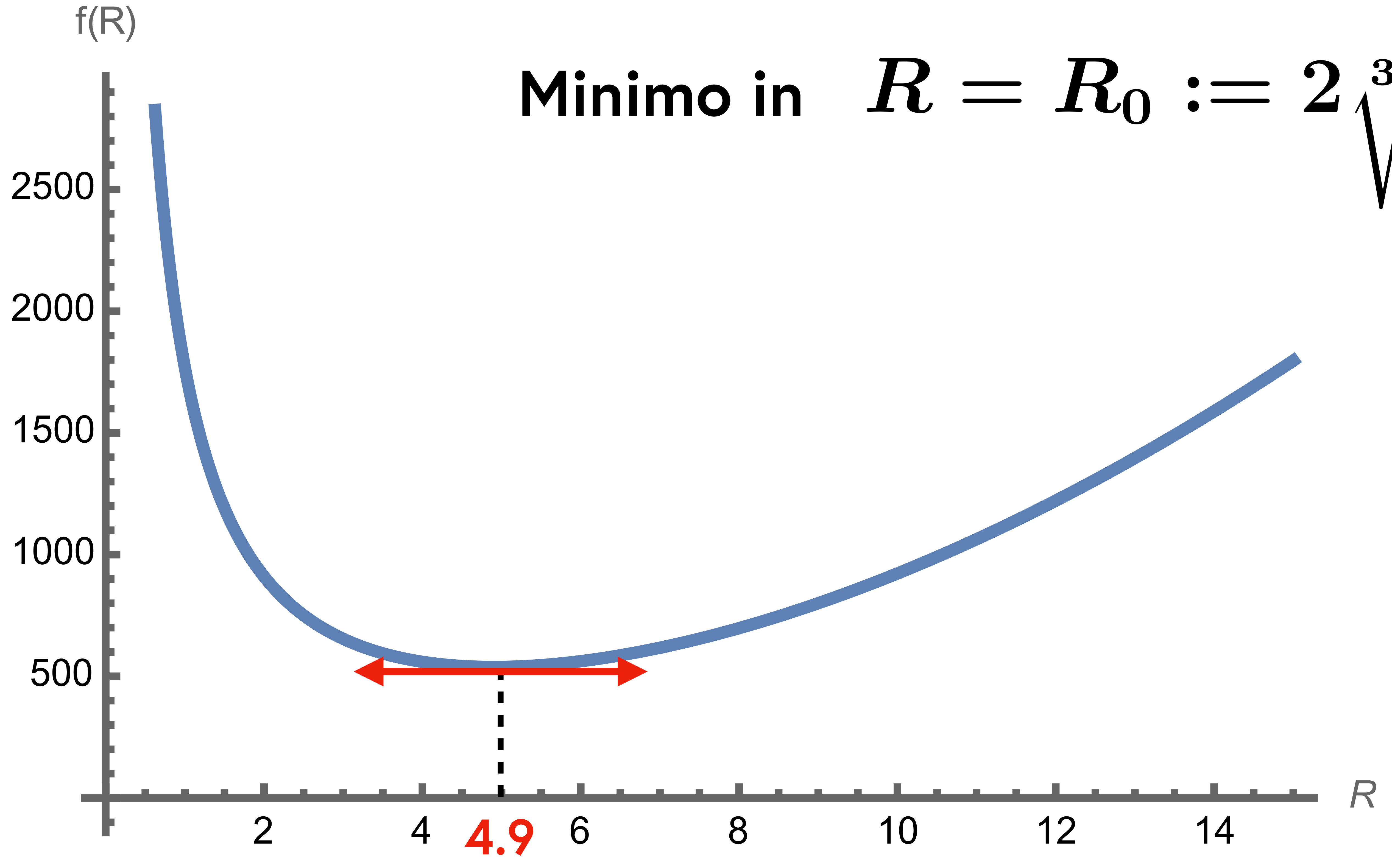
Minimo in $R = R_0 := 2\sqrt[3]{\frac{55}{\sqrt{3}+2}} \approx 4.9$



$$g(R) = \frac{1760}{R} + 2R^2(\sqrt{3}+2)$$

Ricordiamo: è la superficie di metallo utilizzata per una scatola cilindrica (SCARTO INCLUSO) di raggio R e volume fissato pari a 880 cm³

Minimo in $R = R_0 := 2\sqrt[3]{\frac{55}{\sqrt{3}+2}} \approx 4.9$

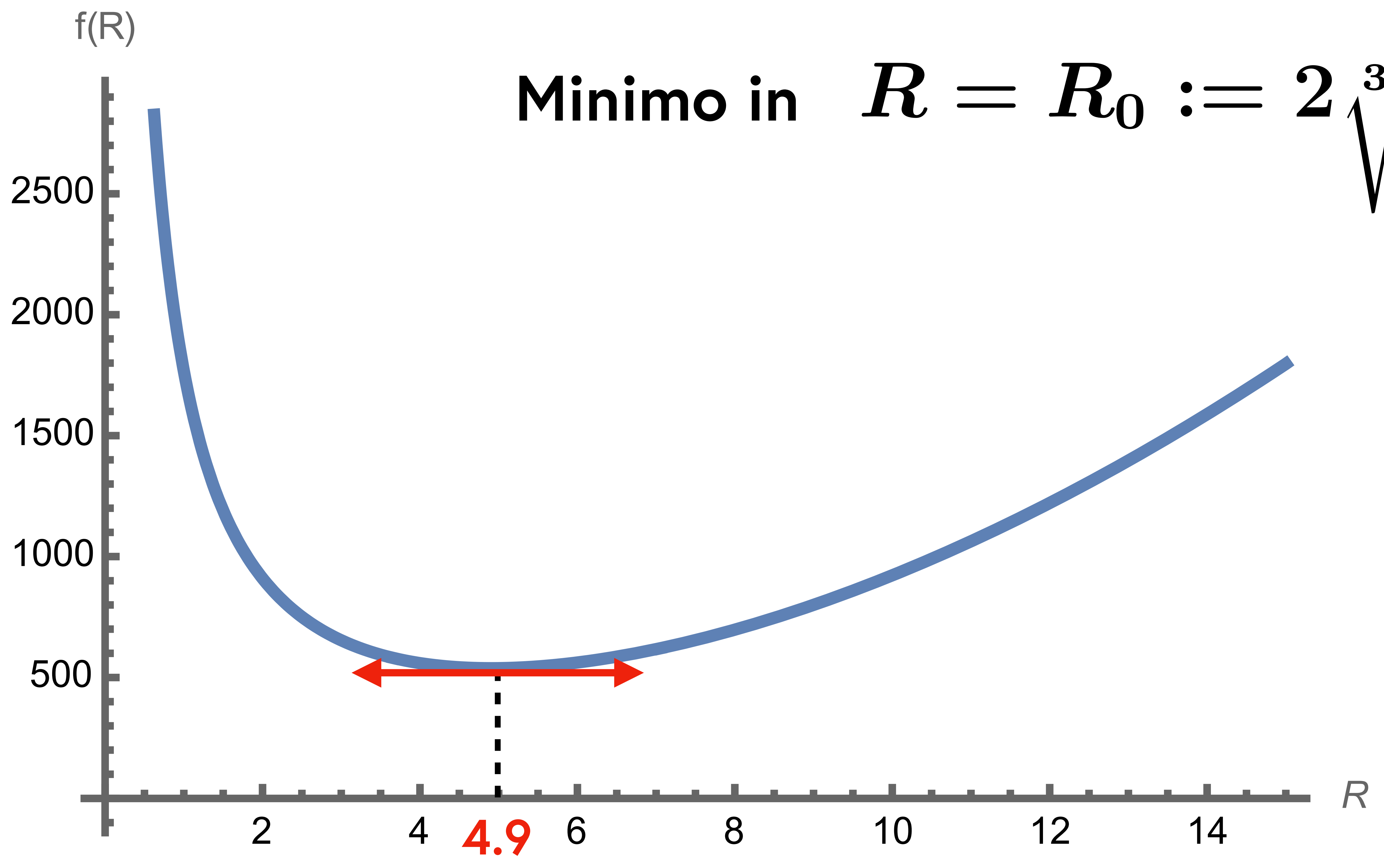


$$h = \frac{880}{\pi R_0^2} = \frac{4\sqrt[3]{55}\left(\sqrt{3}+2\right)^{2/3}}{\pi}$$

$$g(R) = \frac{1760}{R} + 2R^2(\sqrt{3}+2)$$

Ricordiamo: è la superficie di metallo utilizzata per una scatola cilindrica (SCARTO INCLUSO) di raggio R e volume fissato pari a 880 cm^3

Minimo in $R = R_0 := 2\sqrt[3]{\dfrac{55}{\sqrt{3}+2}} \approx 4.9$

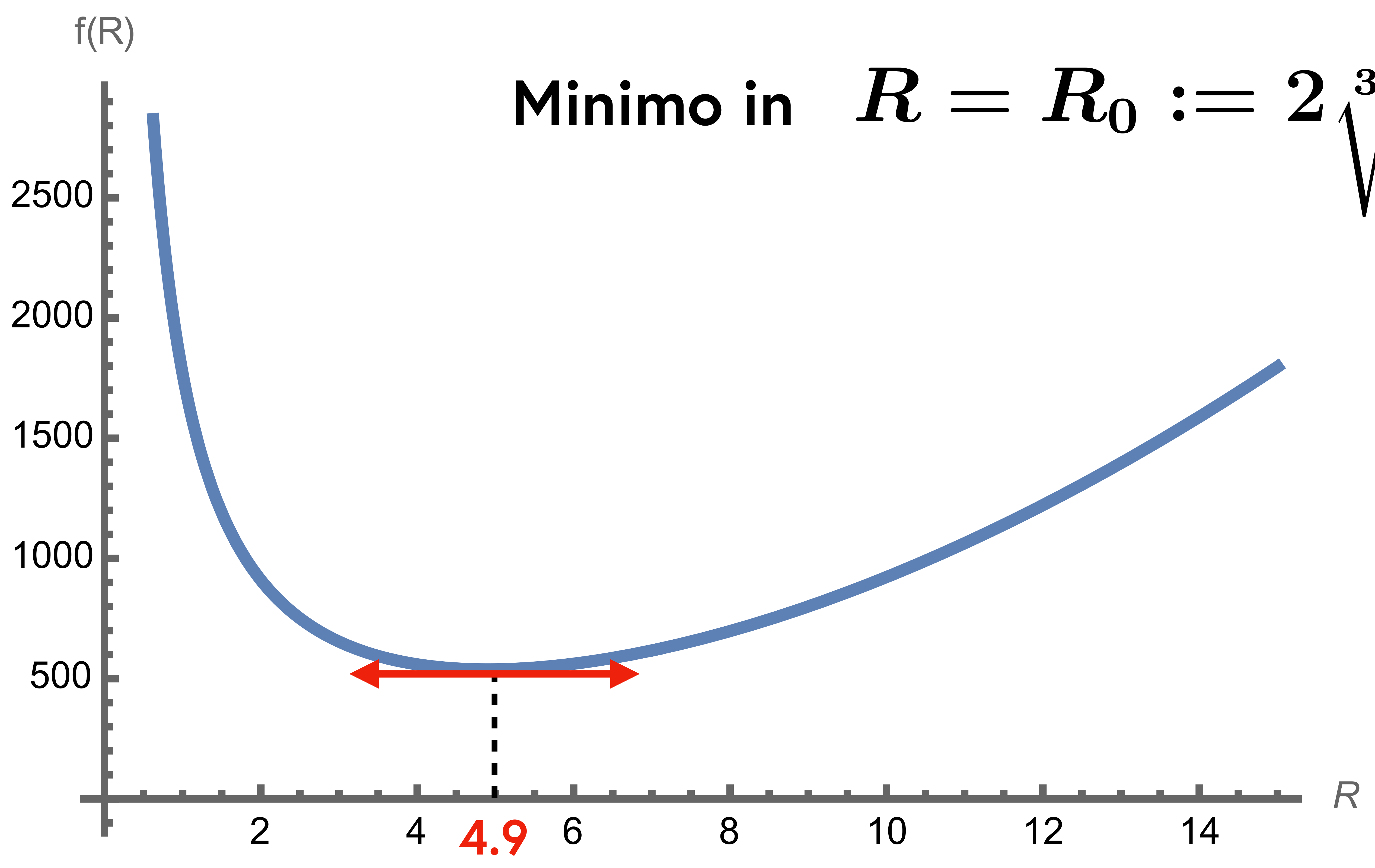


$$h = \frac{880}{\pi R_0^2} = \frac{4\sqrt[3]{55}\left(\sqrt{3}+2\right)^{2/3}}{\pi}$$

$$\approx 11.65$$

$$g(R) = \frac{1760}{R} + 2R^2(\sqrt{3}+2)$$

Ricordiamo: è la superficie di metallo utilizzata per una scatola cilindrica (SCARTO INCLUSO) di raggio R e volume fissato pari a 880 cm³



Minimo in $R = R_0 := 2\sqrt[3]{\frac{55}{\sqrt{3}+2}} \approx 4.9$

$$h = \frac{880}{\pi R_0^2} = \frac{4\sqrt[3]{55}\left(\sqrt{3}+2\right)^{2/3}}{\pi} \approx 11.65$$

Superficie di metallo usata: $g(R_0) = \frac{1760}{R_0} + 2R_0^2(\sqrt{3}+2) \approx 538\mathrm{cm}^2$

Conclusione

$R = 4.9$

$h = 11.7$

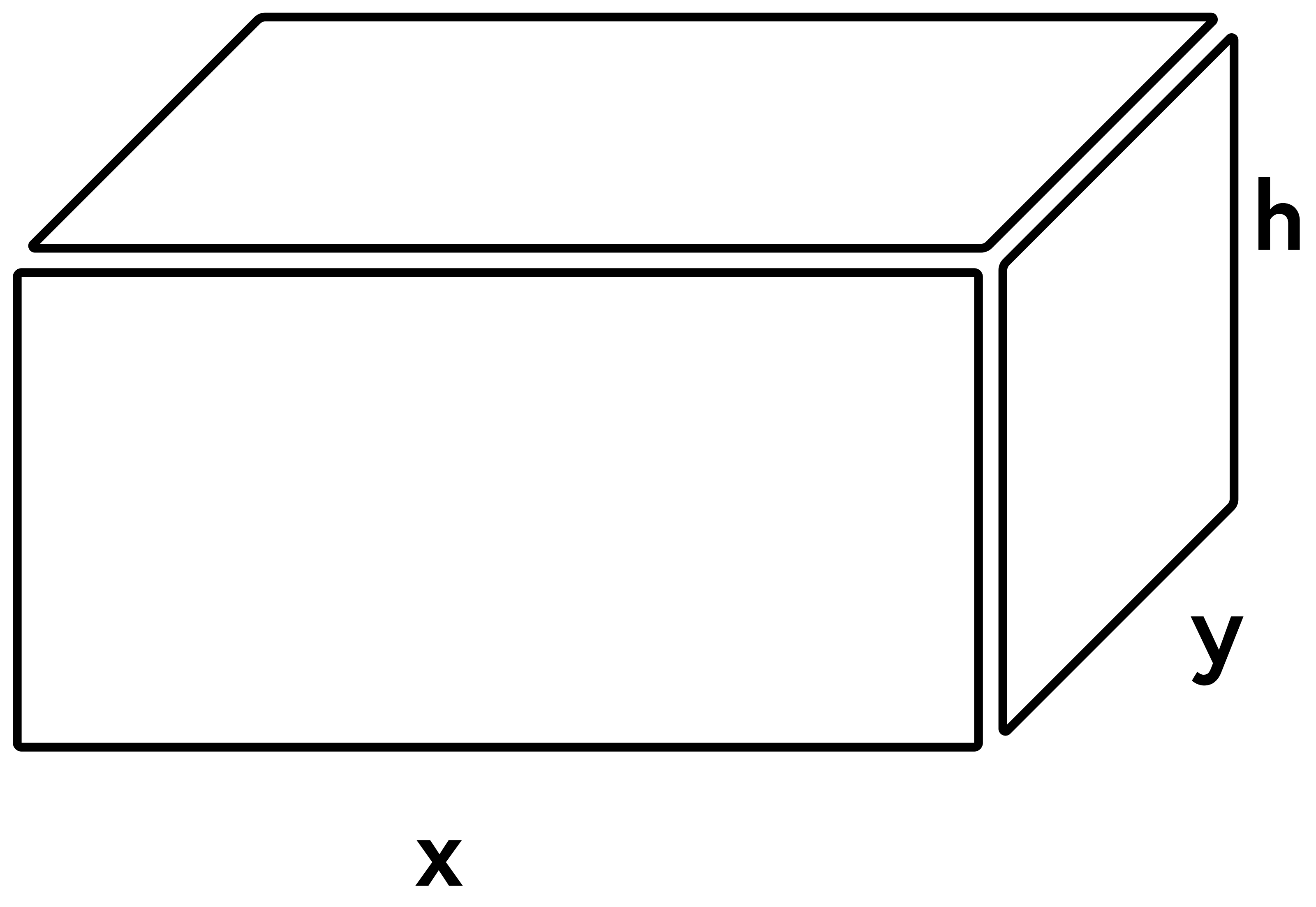
Conclusione

$$R = 4.9$$

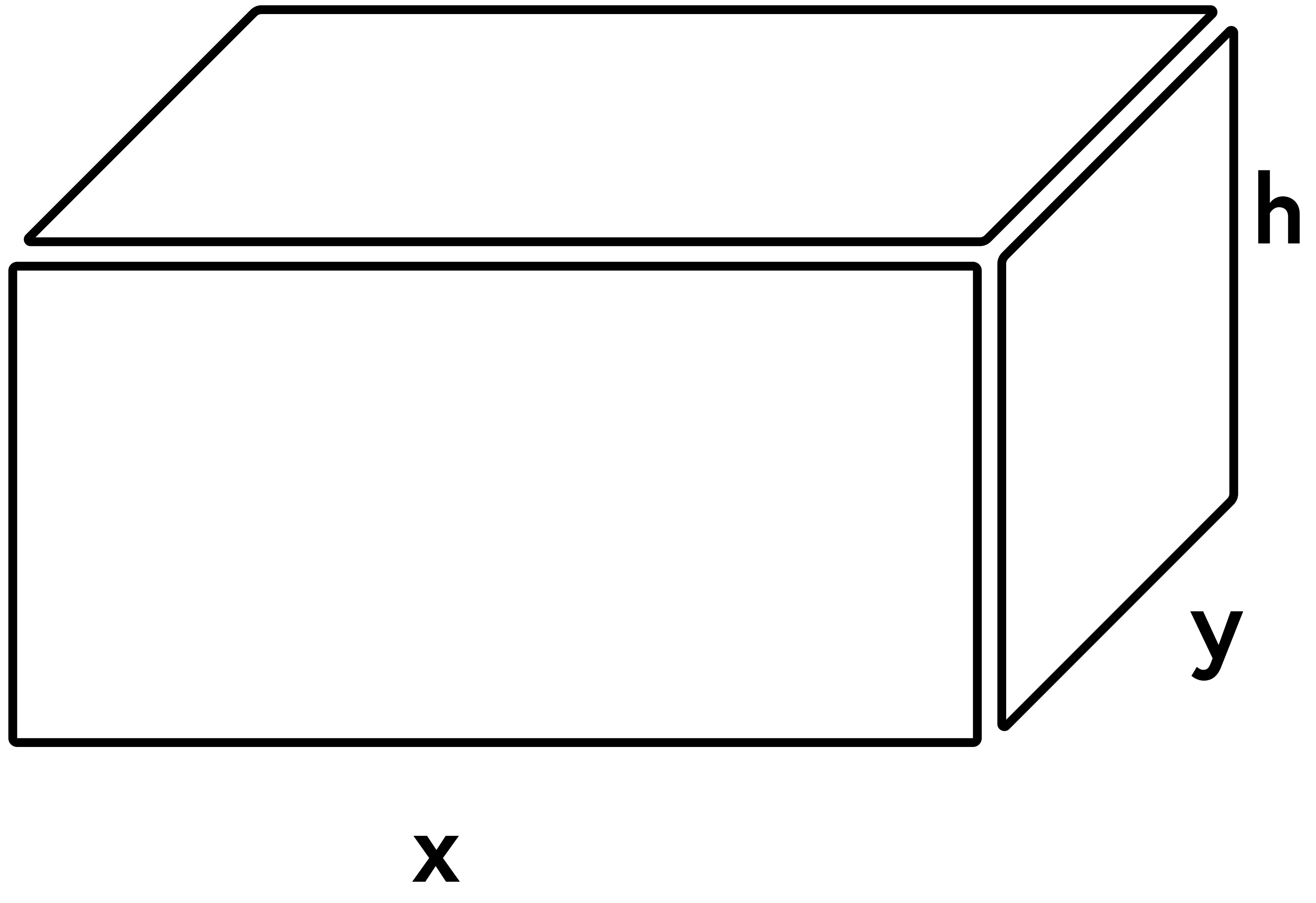
$$h = 11.7$$

valori teorici: R= 4.9, h= 11.65: COINCIDONO !

ma…non era meglio una scatola a forma di parallelepipedo?

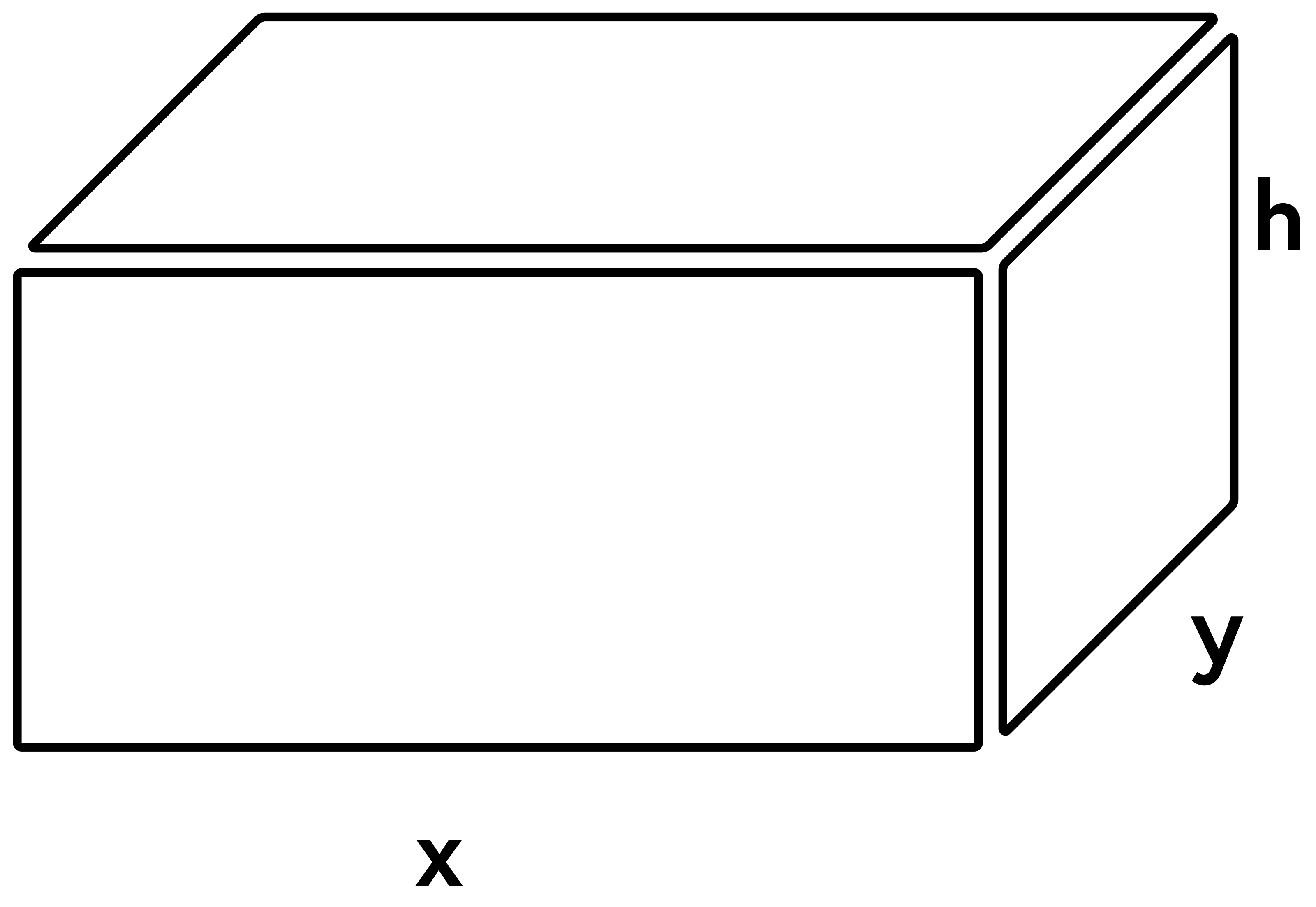


ma...non era meglio una scatola a forma di parallelepipedo?



$$880 = xyh : \ h = \frac{880}{xy}$$

ma…non era meglio una scatola a forma di parallelepipedo?

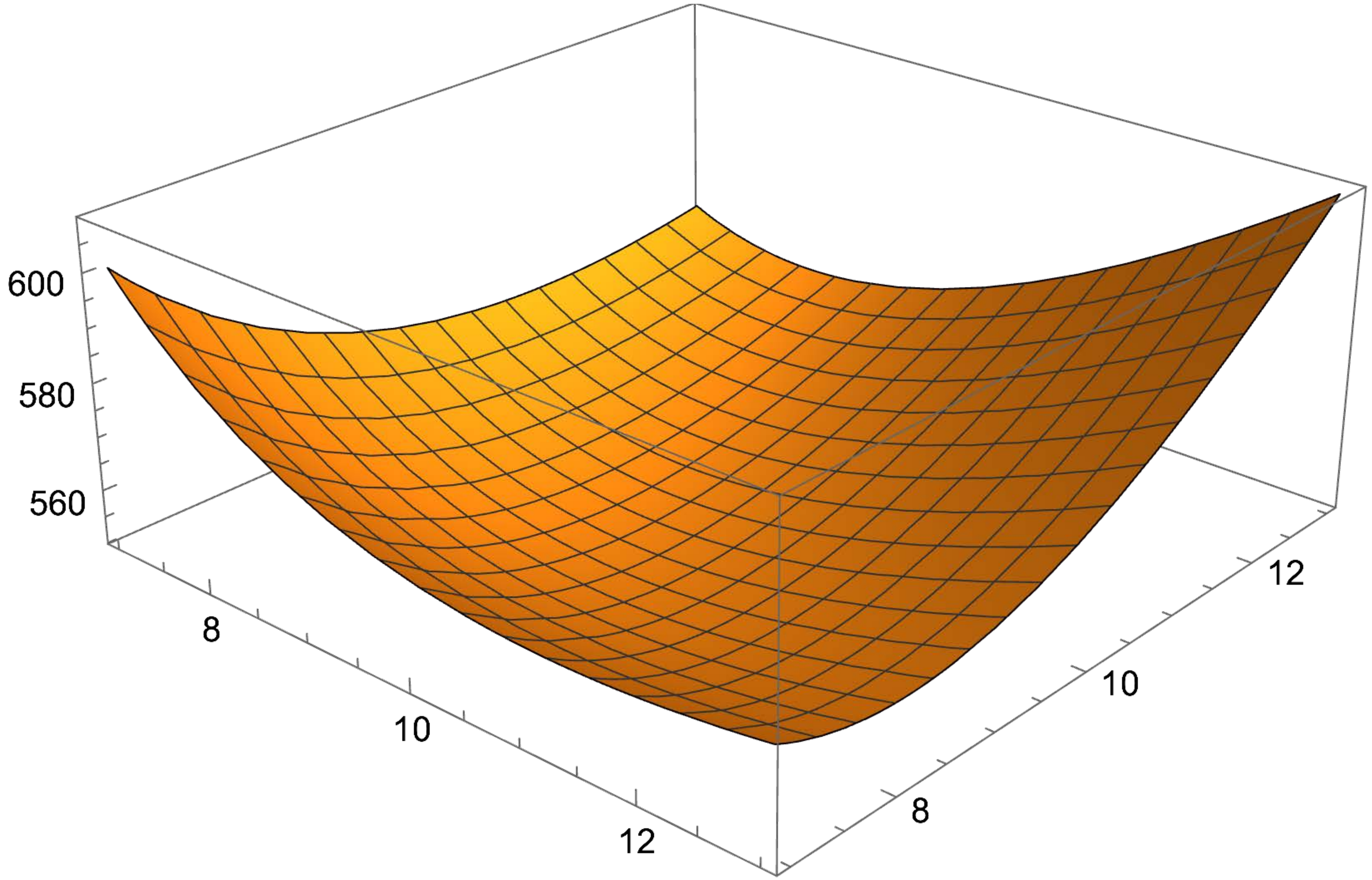


$$880 = xyh \,:\; h = \frac{880}{xy}$$

Superficie: $$S(x, y) = 2(xy + xh + yh) = 2\left(xy + \frac{880}{xy}(x + y)\right)$$

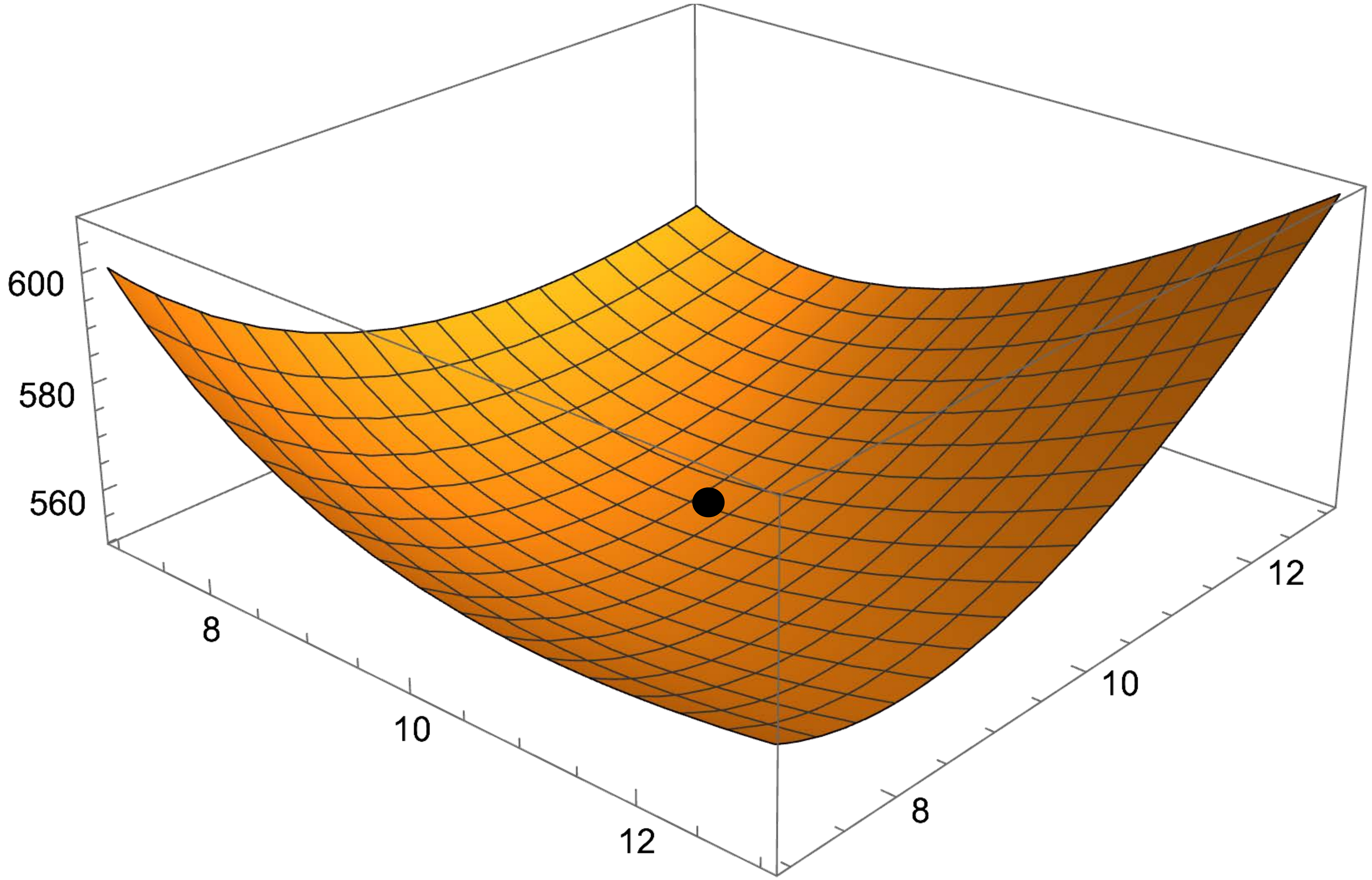
$$S(x, y) = 2(xy + xh + yh) = 2\left(xy + \frac{880}{xy}(x + y)\right)$$

$$S(x,y) = 2(xy + xh + yh) = 2\left(xy + \frac{880}{xy}(x+y)\right)$$



$$S(x, y) = 2(xy + xh + yh) = 2\left(xy + \frac{880}{xy}(x + y)\right)$$

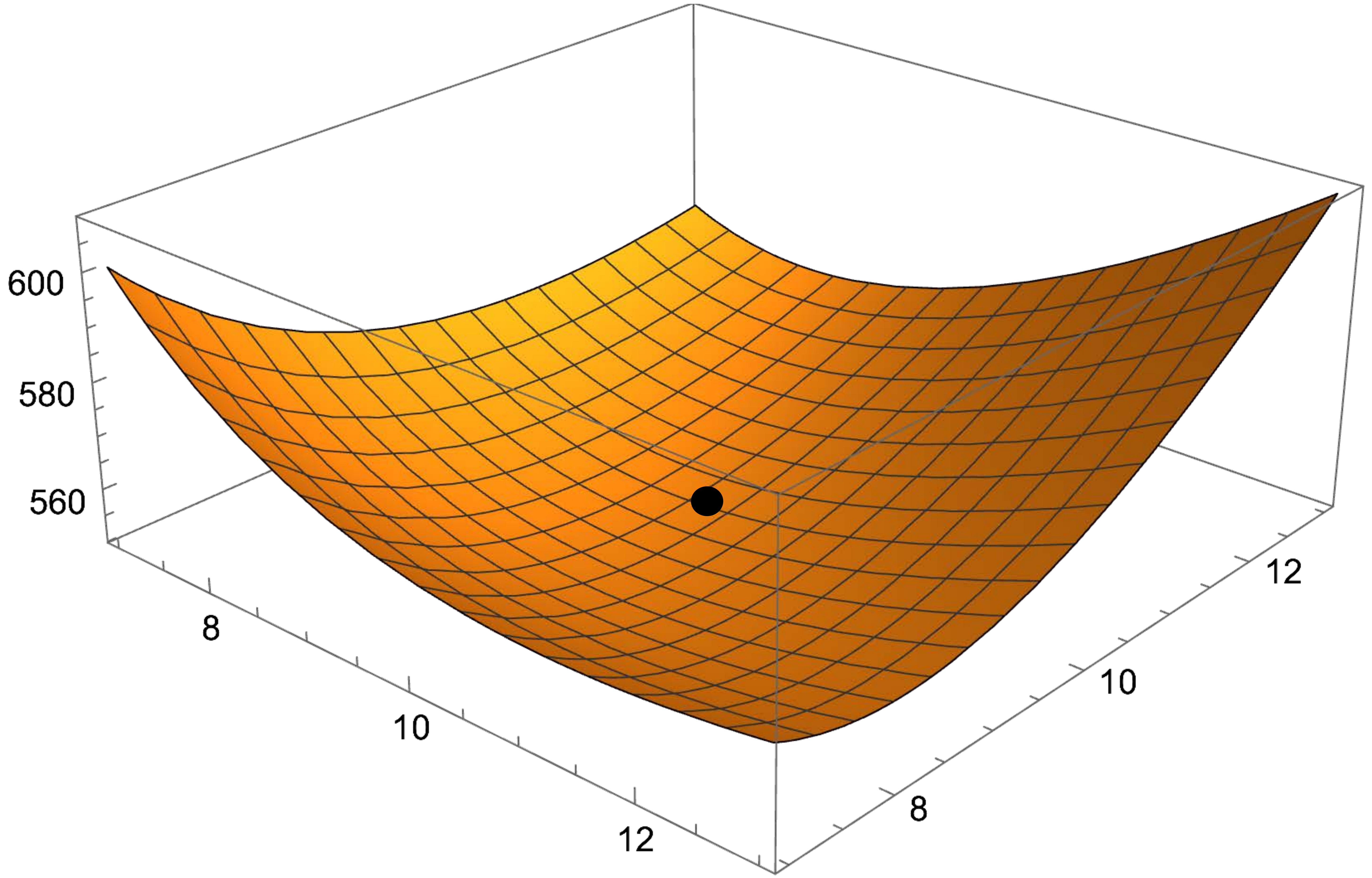
Minimo per $x = y = h = \sqrt[3]{880} \approx 9.58$



$$S(x,y) = 2(xy + xh + yh) = 2\left(xy + \frac{880}{xy}(x+y)\right)$$

Minimo per $x = y = h = \sqrt[3]{880} \approx 9.58$

Viene S=550.1 cm²



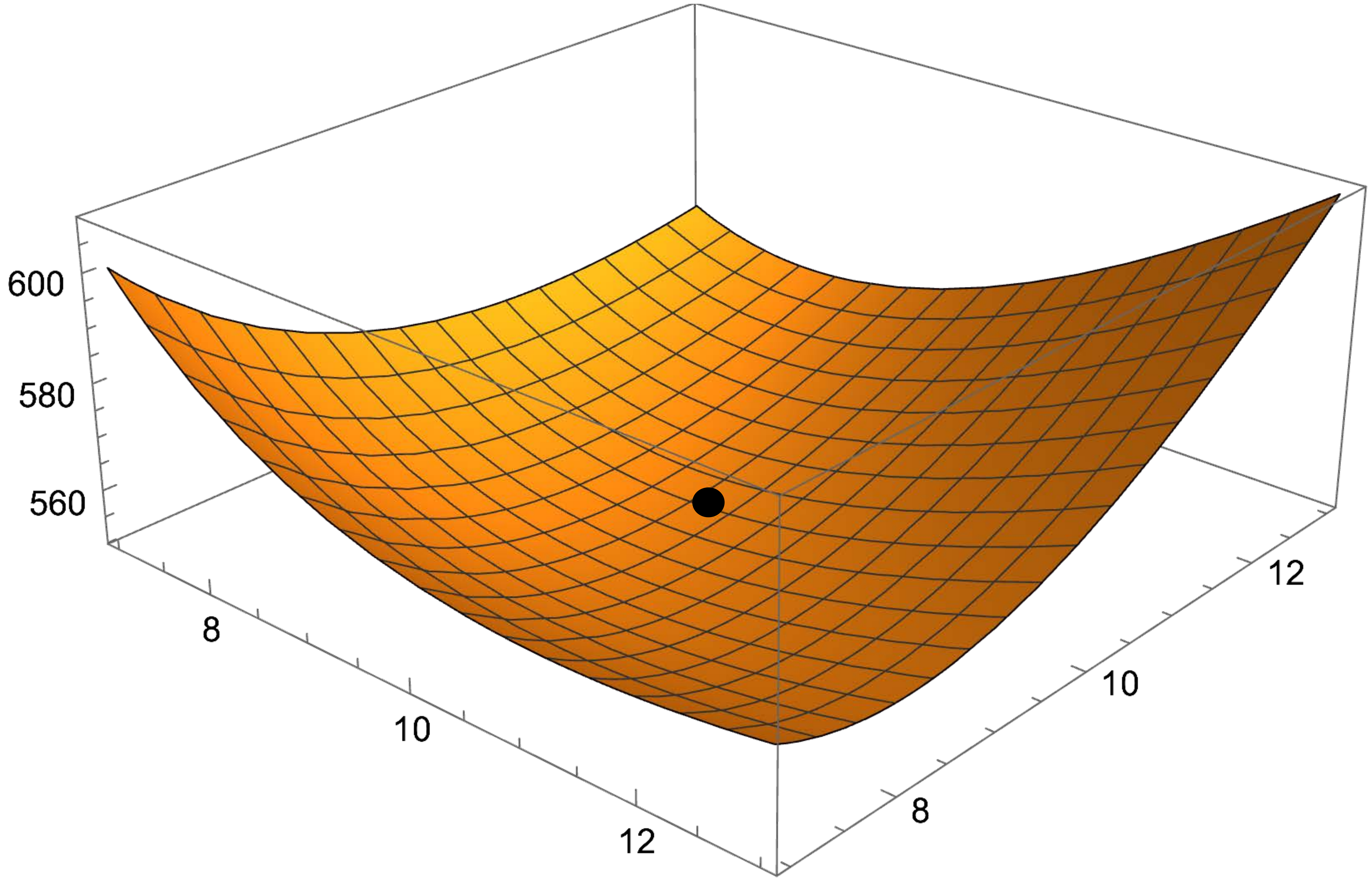
$$S(x,y) = 2(xy + xh + yh) = 2\left(xy + \frac{880}{xy}(x+y)\right)$$

Minimo per $x = y = h = \sqrt[3]{880} \approx 9.58$

Viene S=550.1 cm²

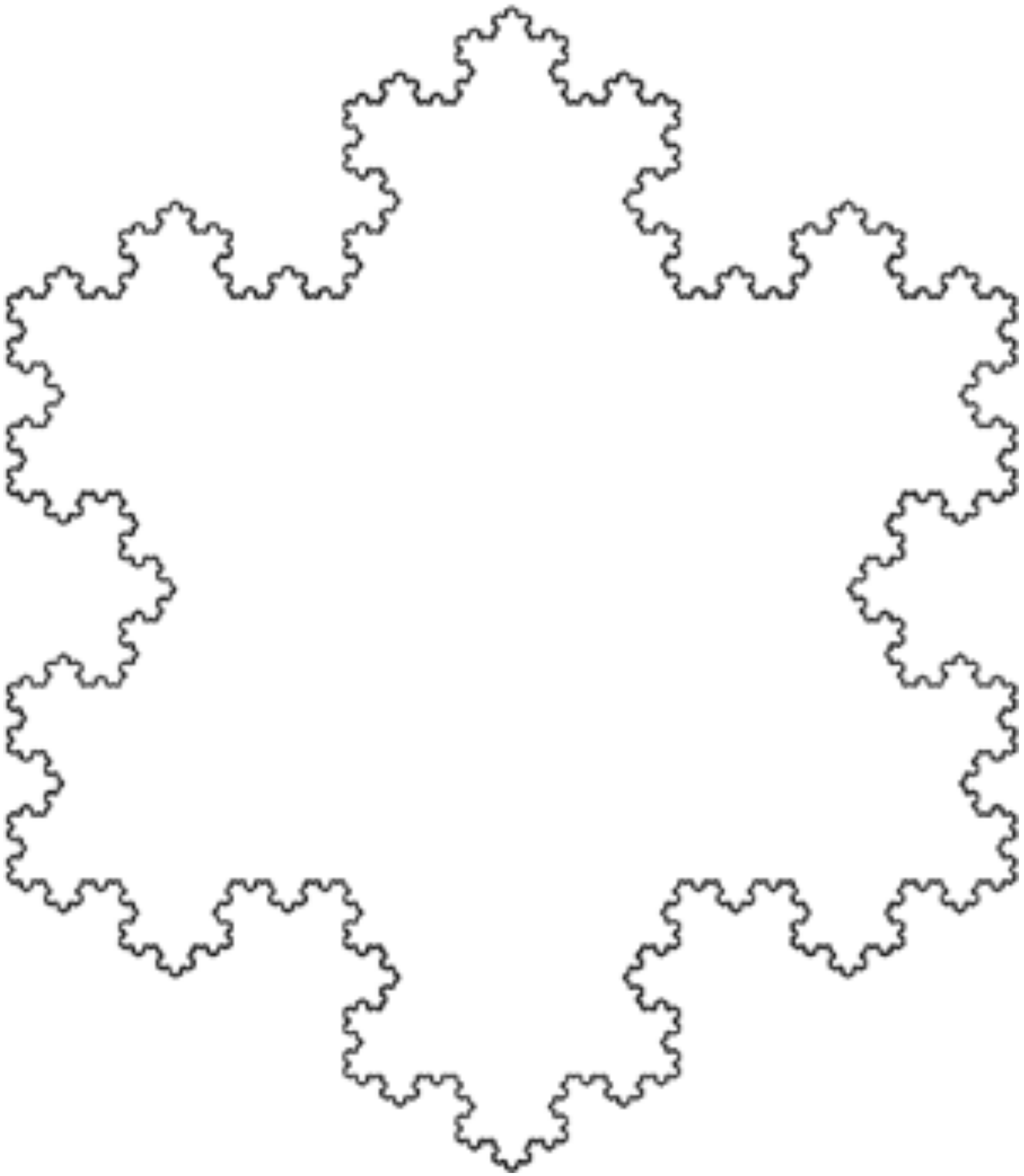
Solo 2.3% in più rispetto

al caso del cilindro 538 cm²

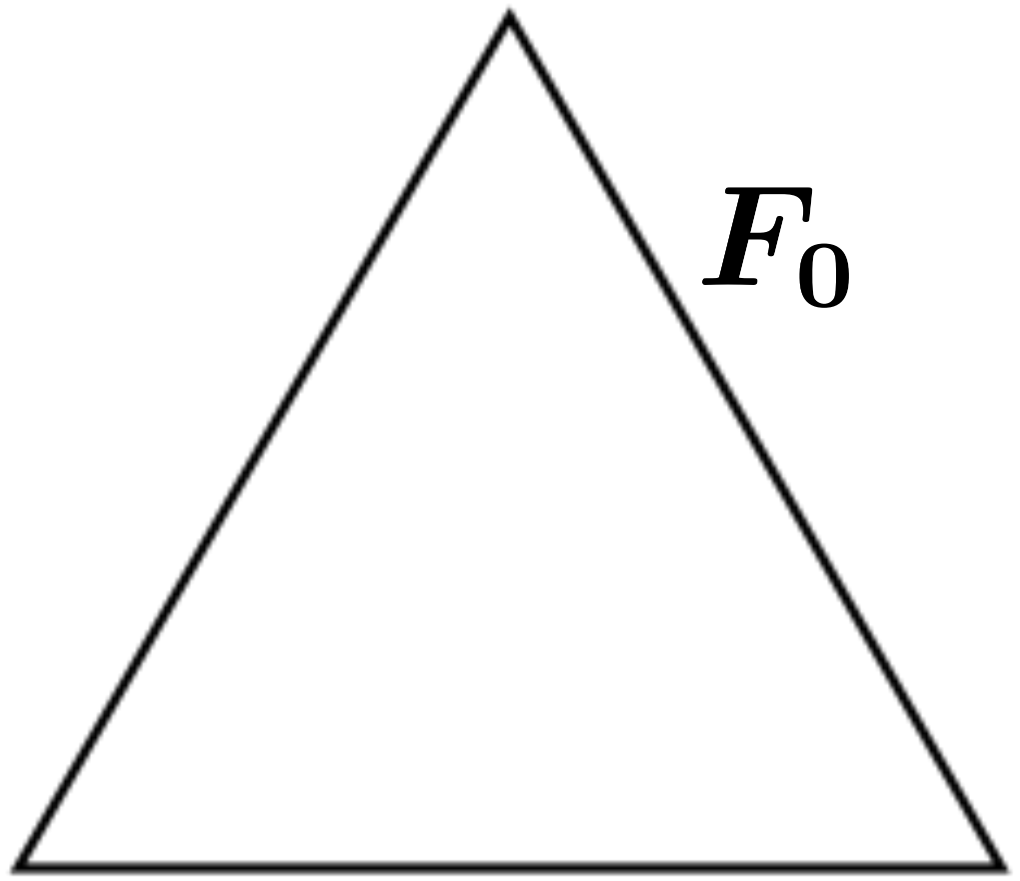


Frattali

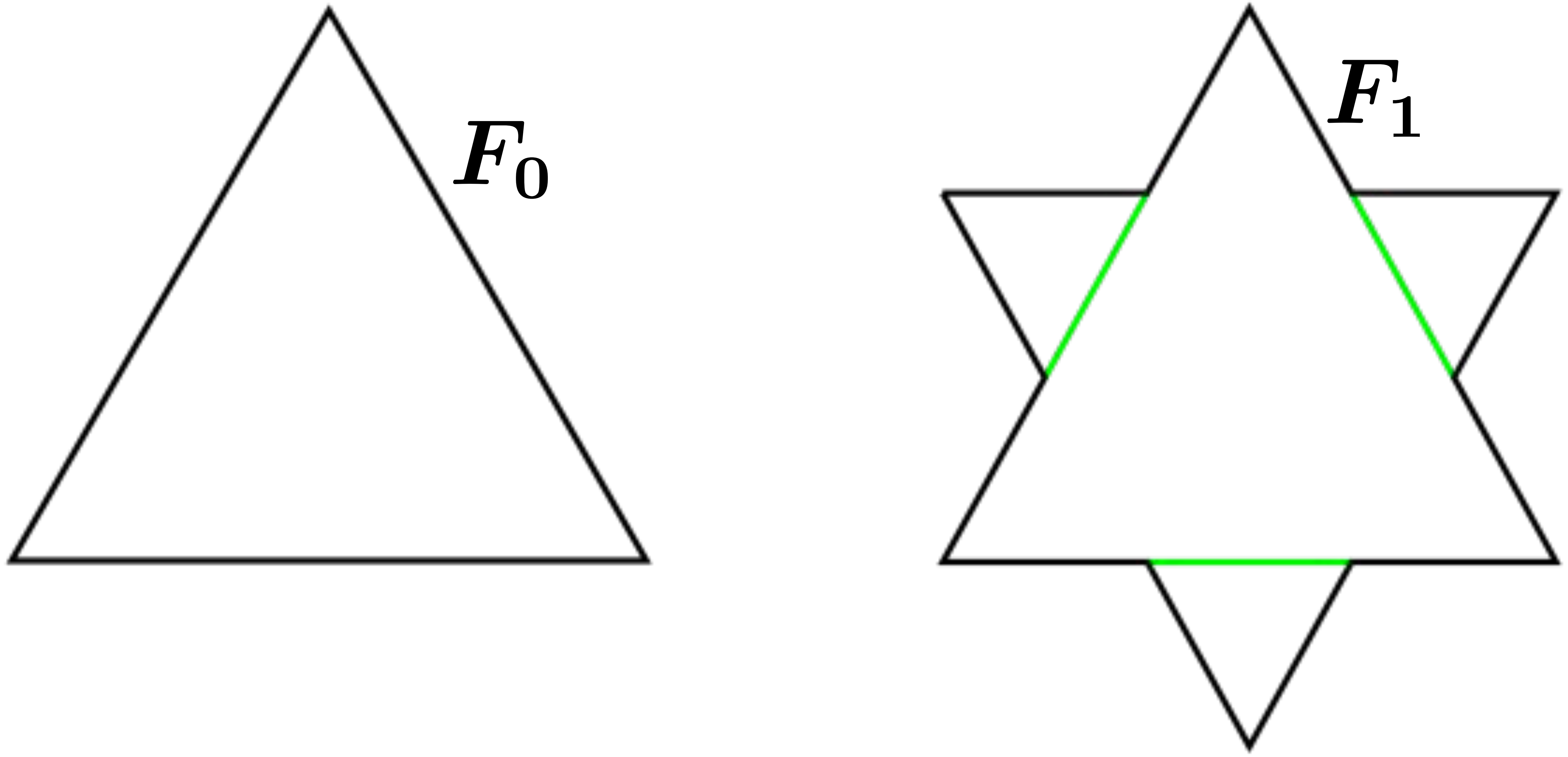
il fiocco di Koch



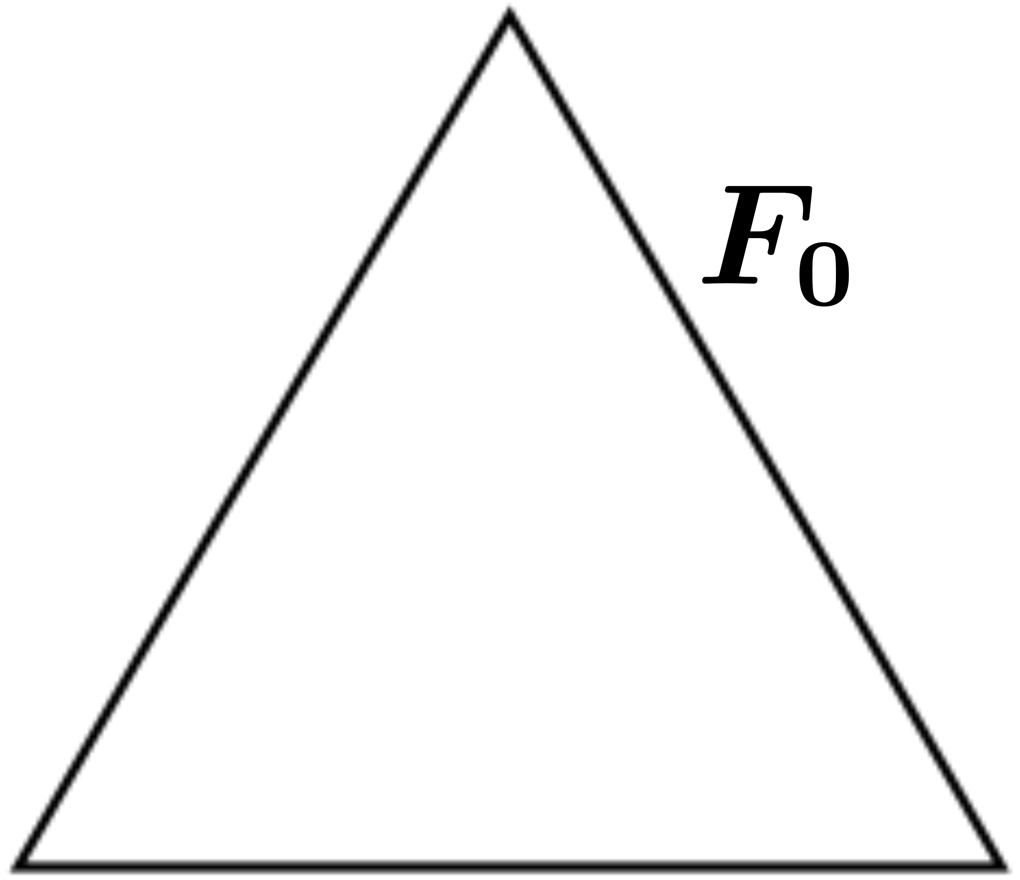
Il fiocco di Koch è il "limite" di queste "curve"...

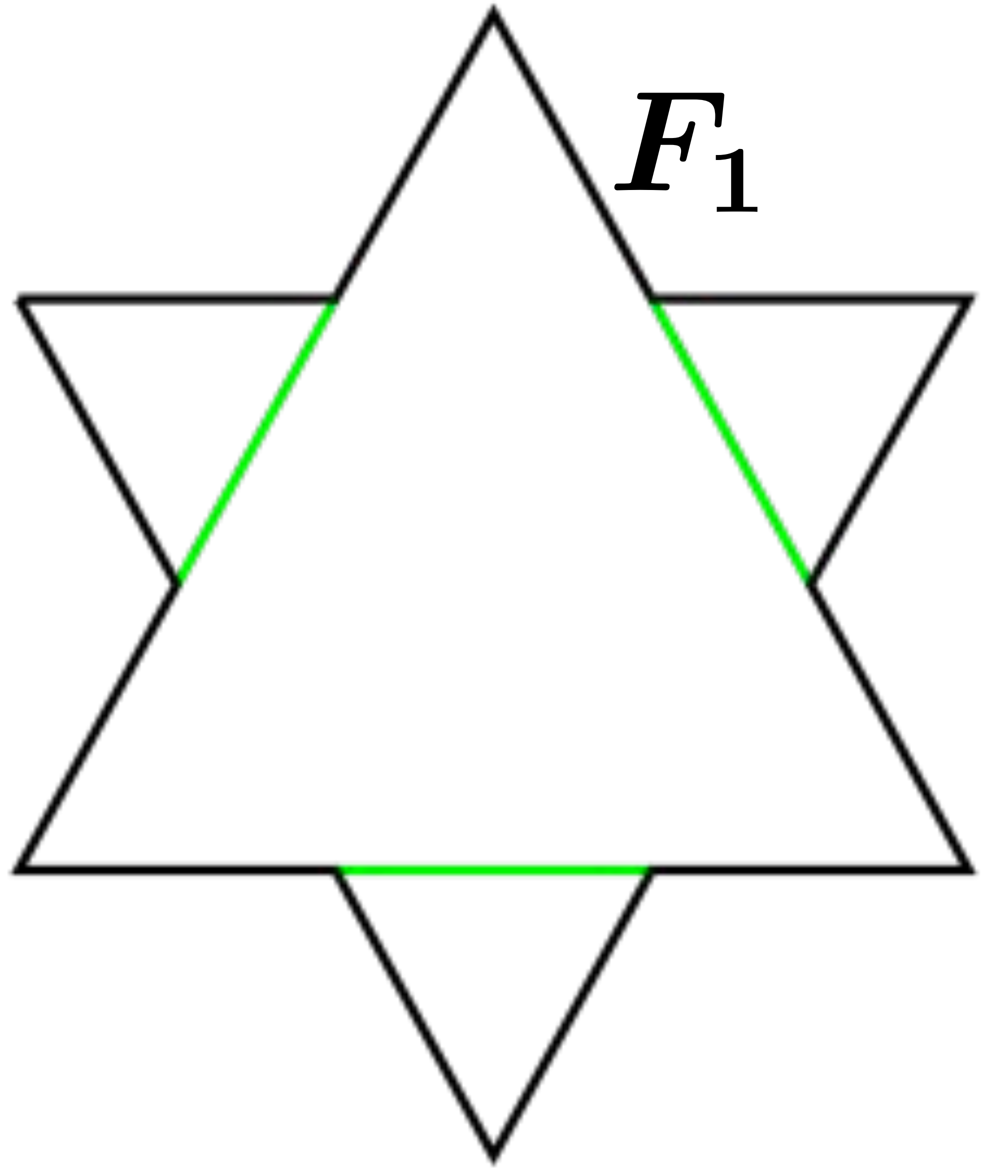


Il fiocco di Koch è il "limite" di queste "curve"...

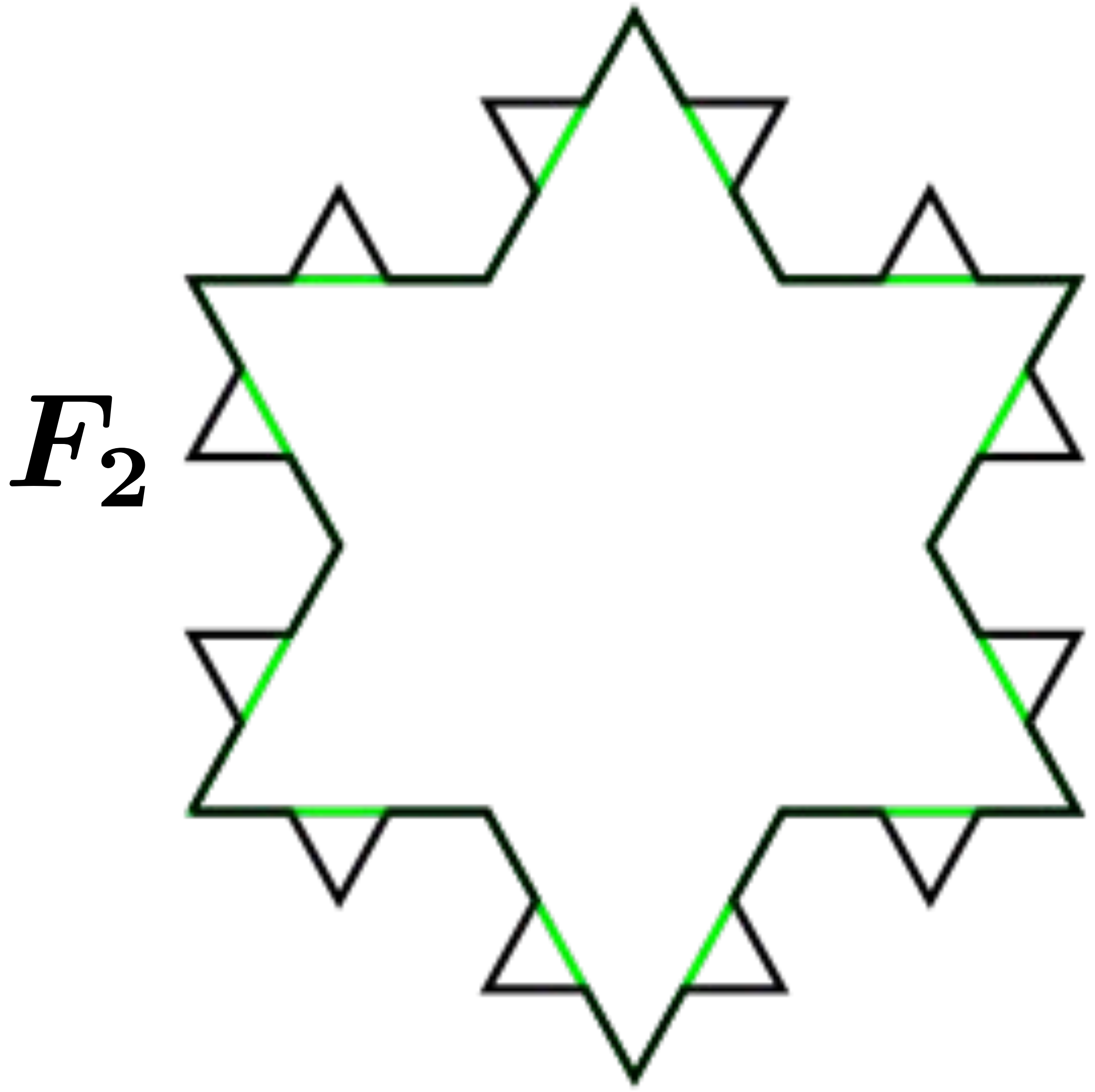


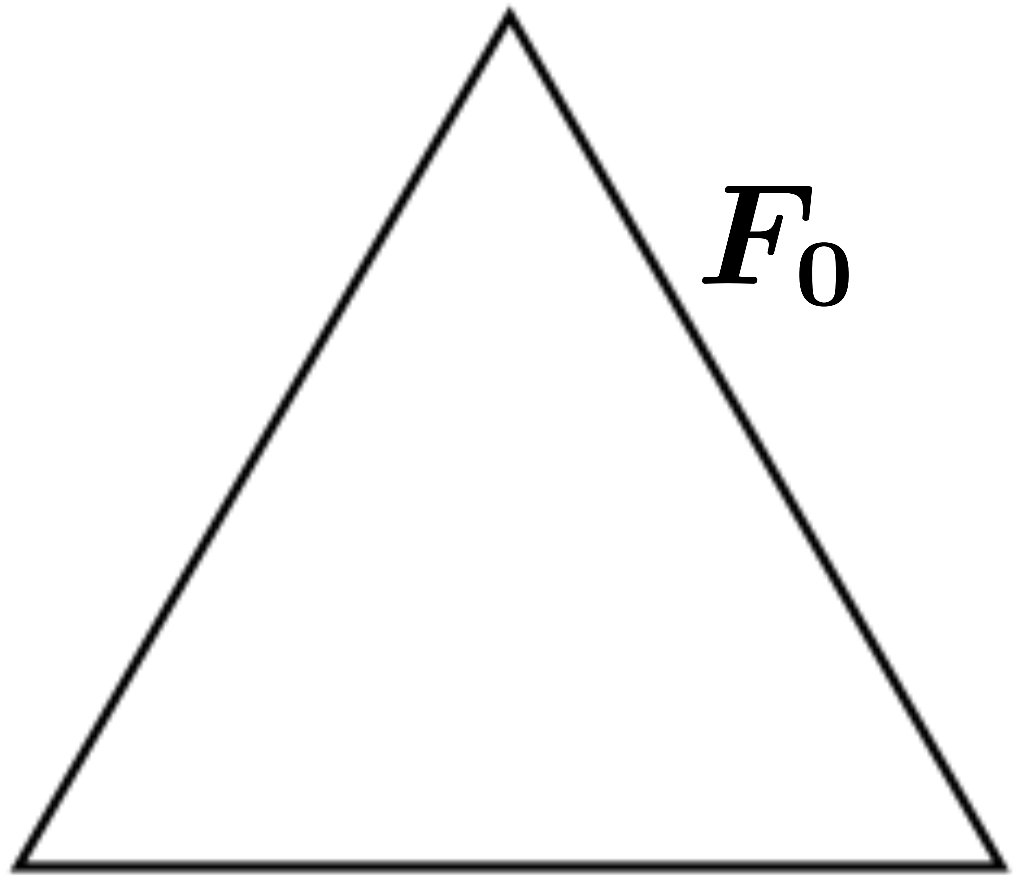
Il fiocco di Koch è il "limite" di queste "curve"...

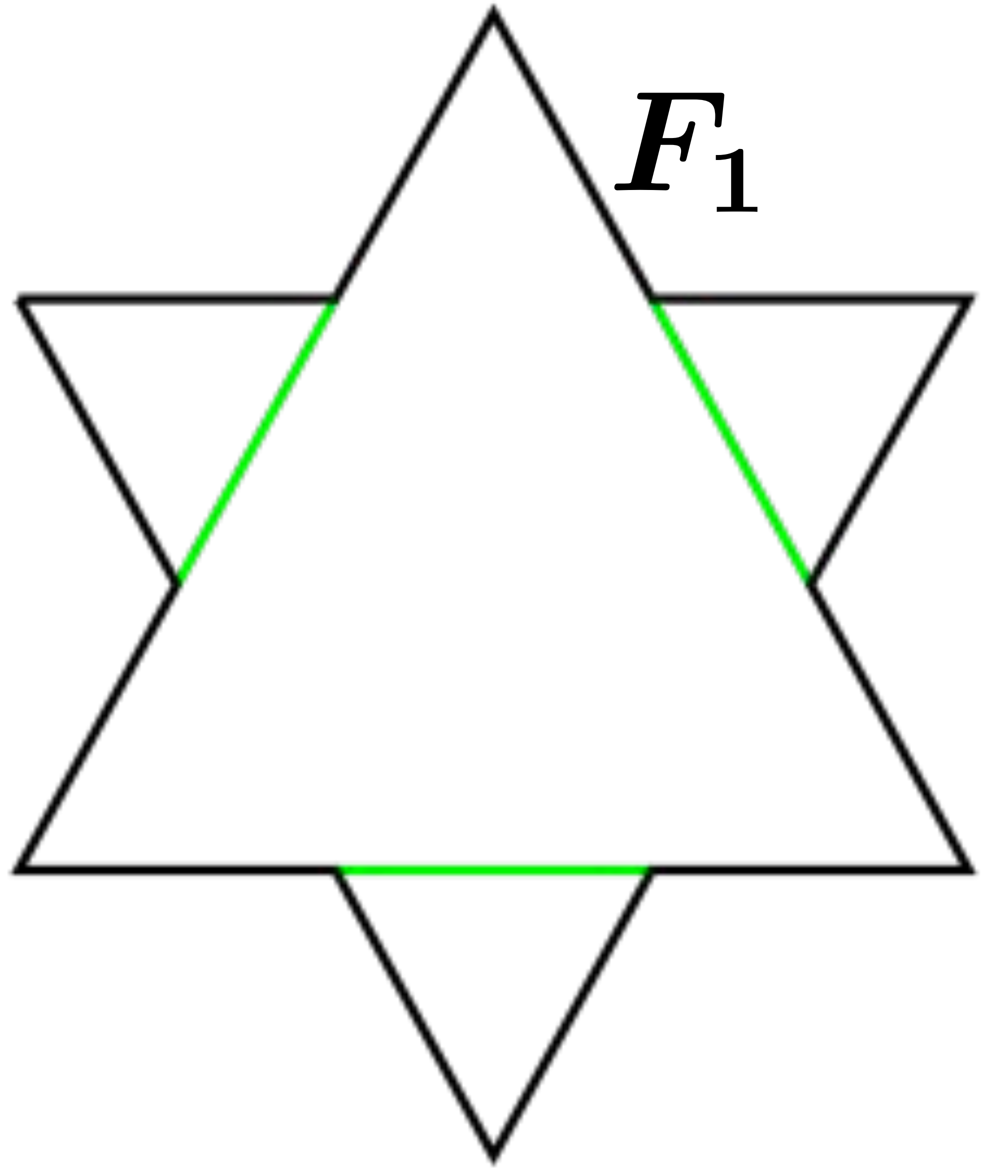




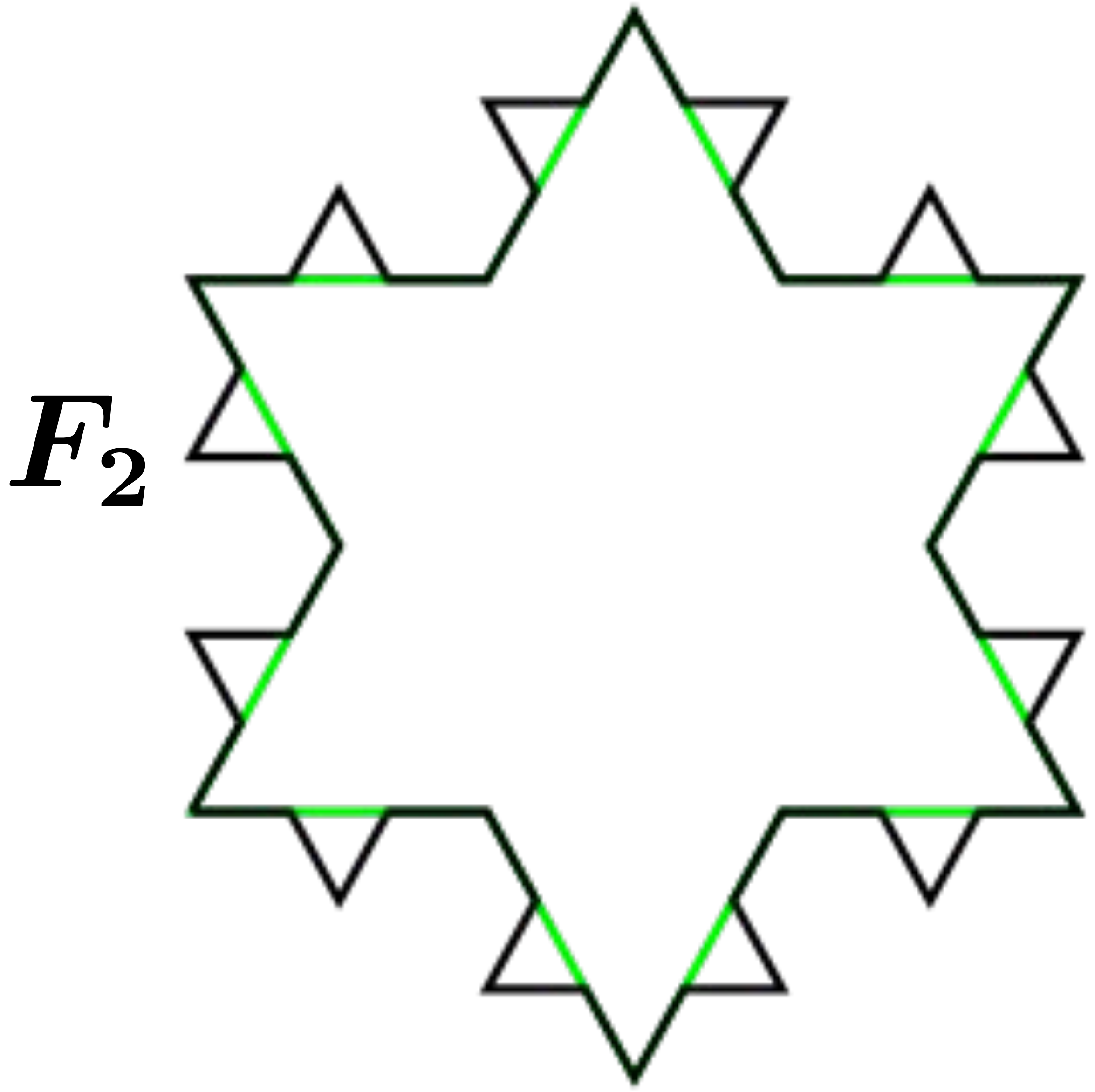
Il fiocco di Koch è il "limite" di queste "curve"...

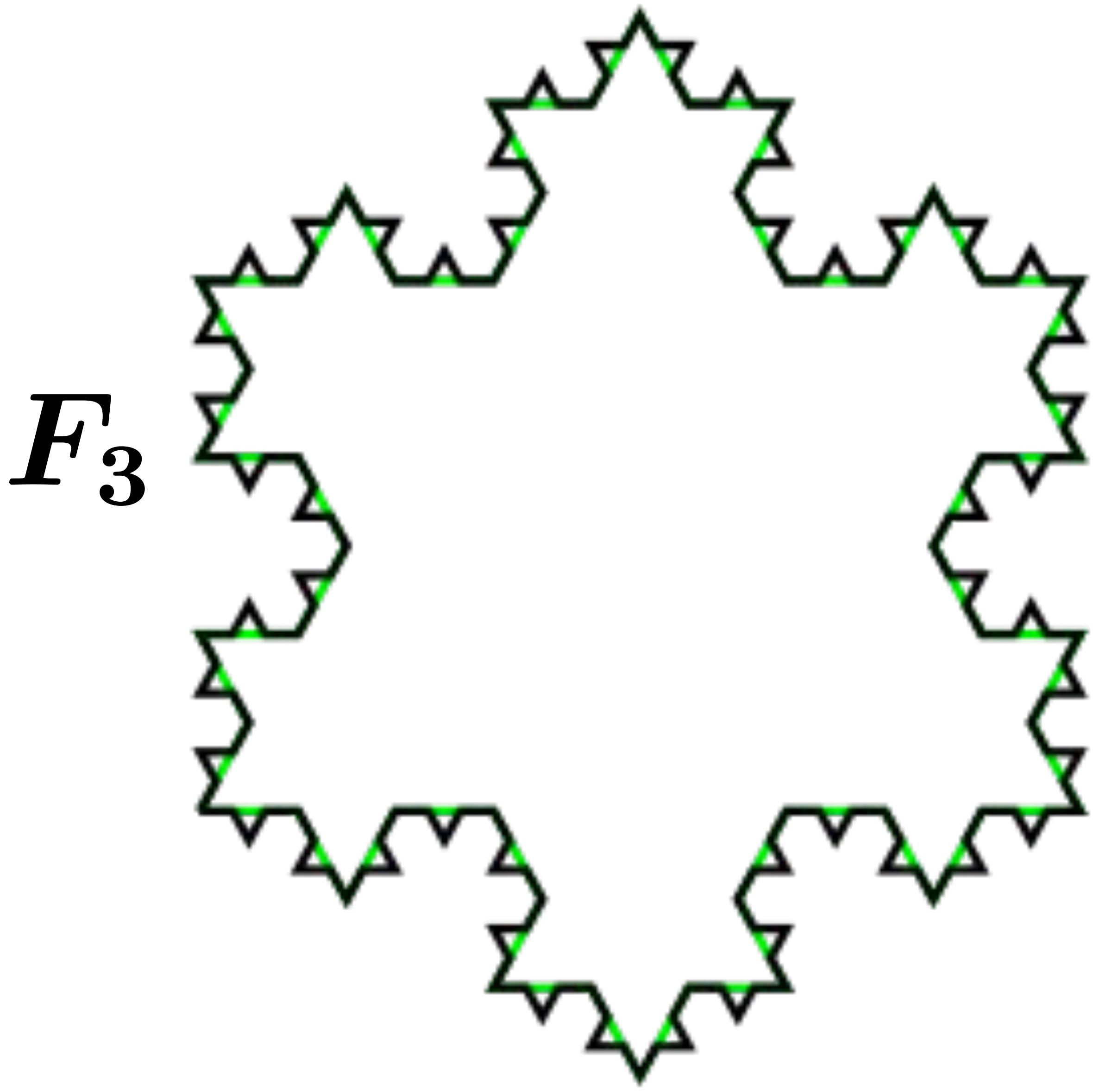


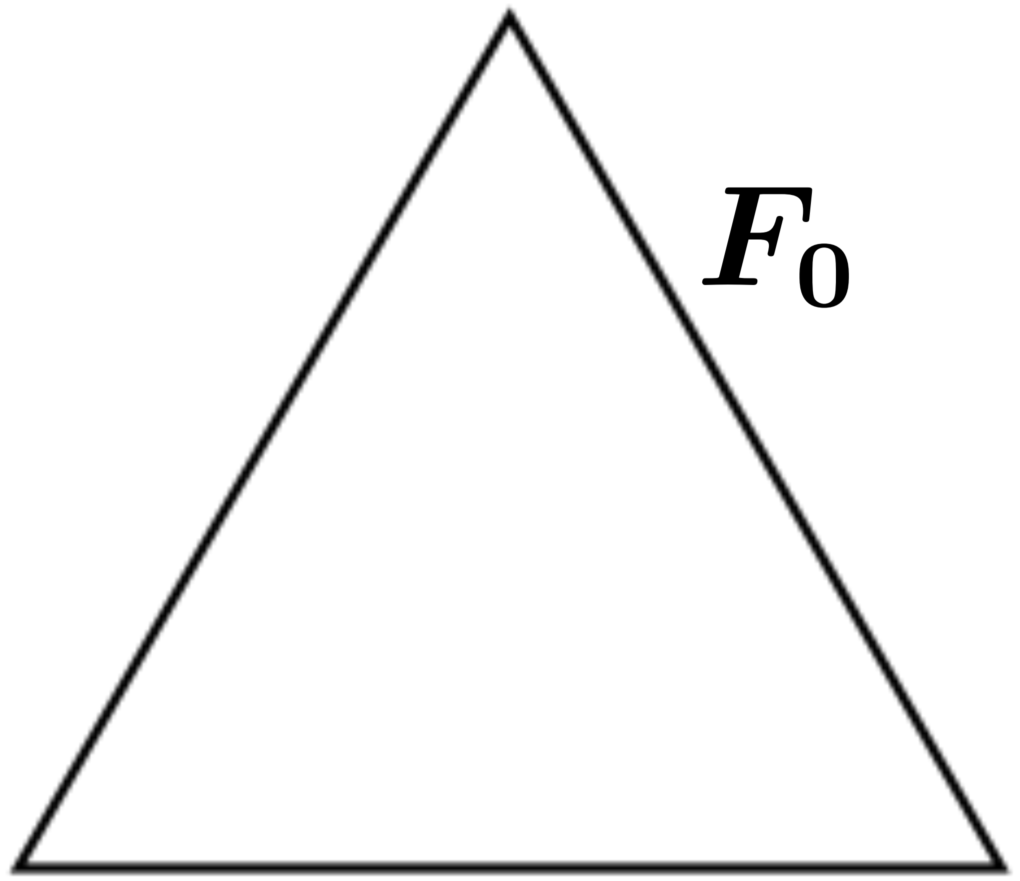




Il fiocco di Koch è il "limite" di queste "curve"...

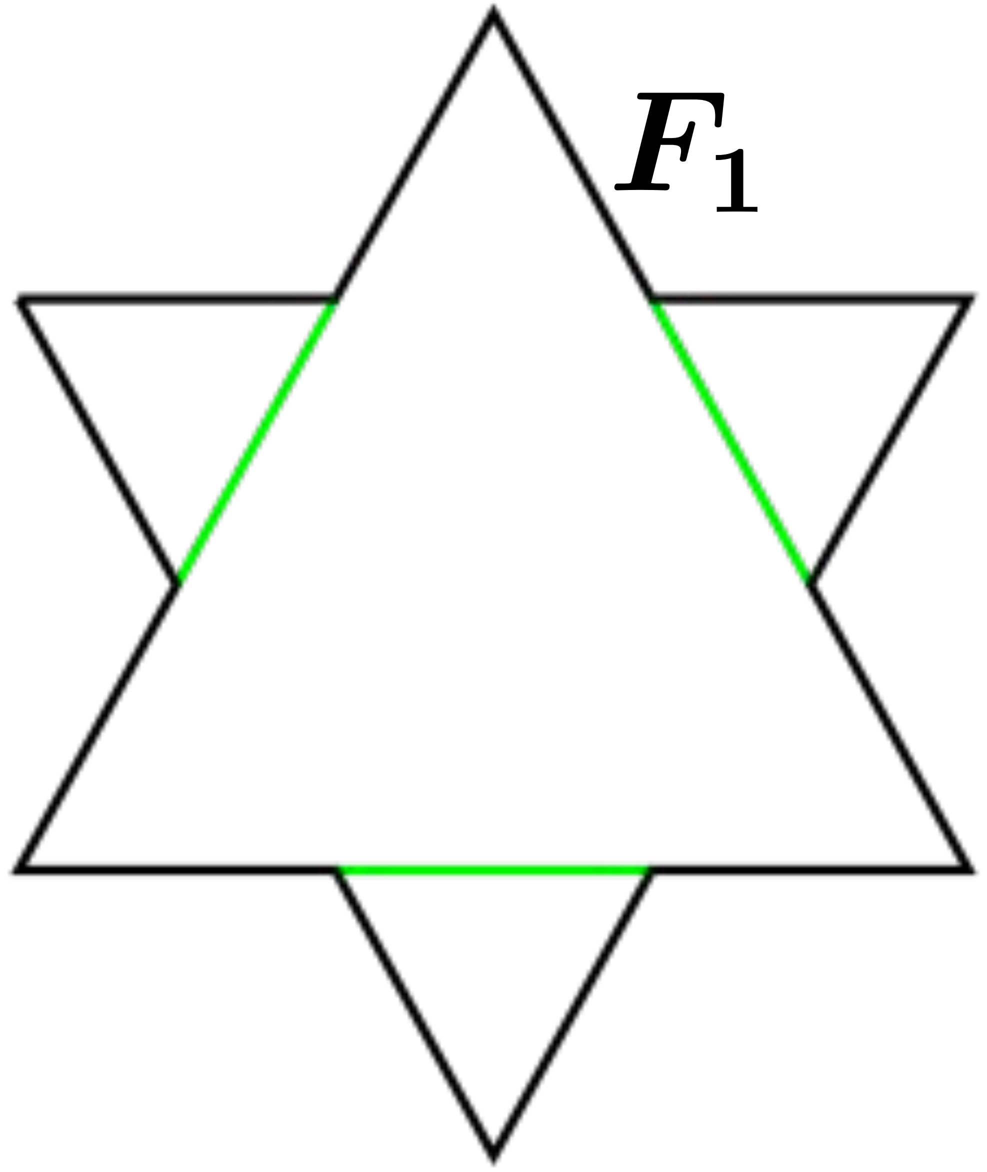






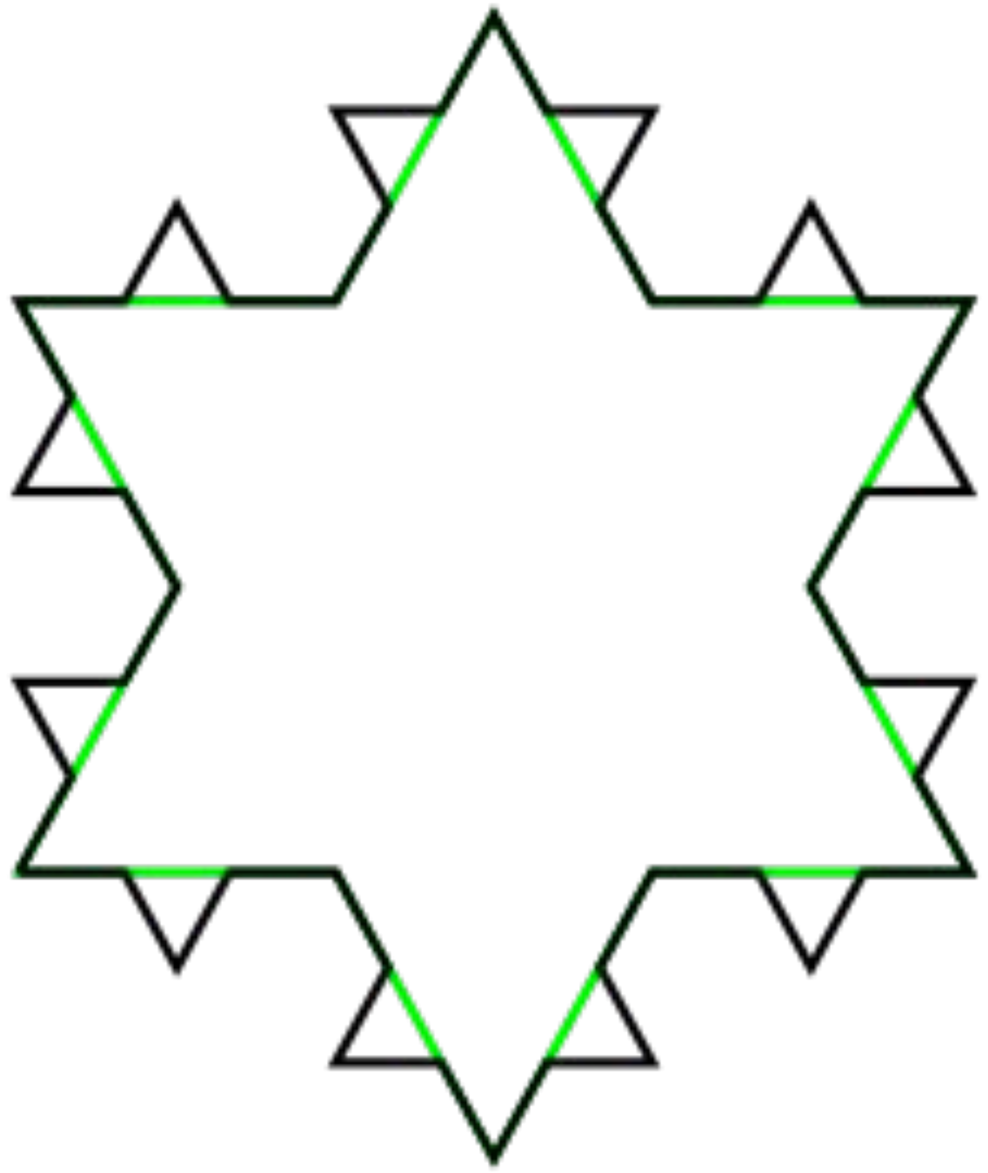
F_0

F_1

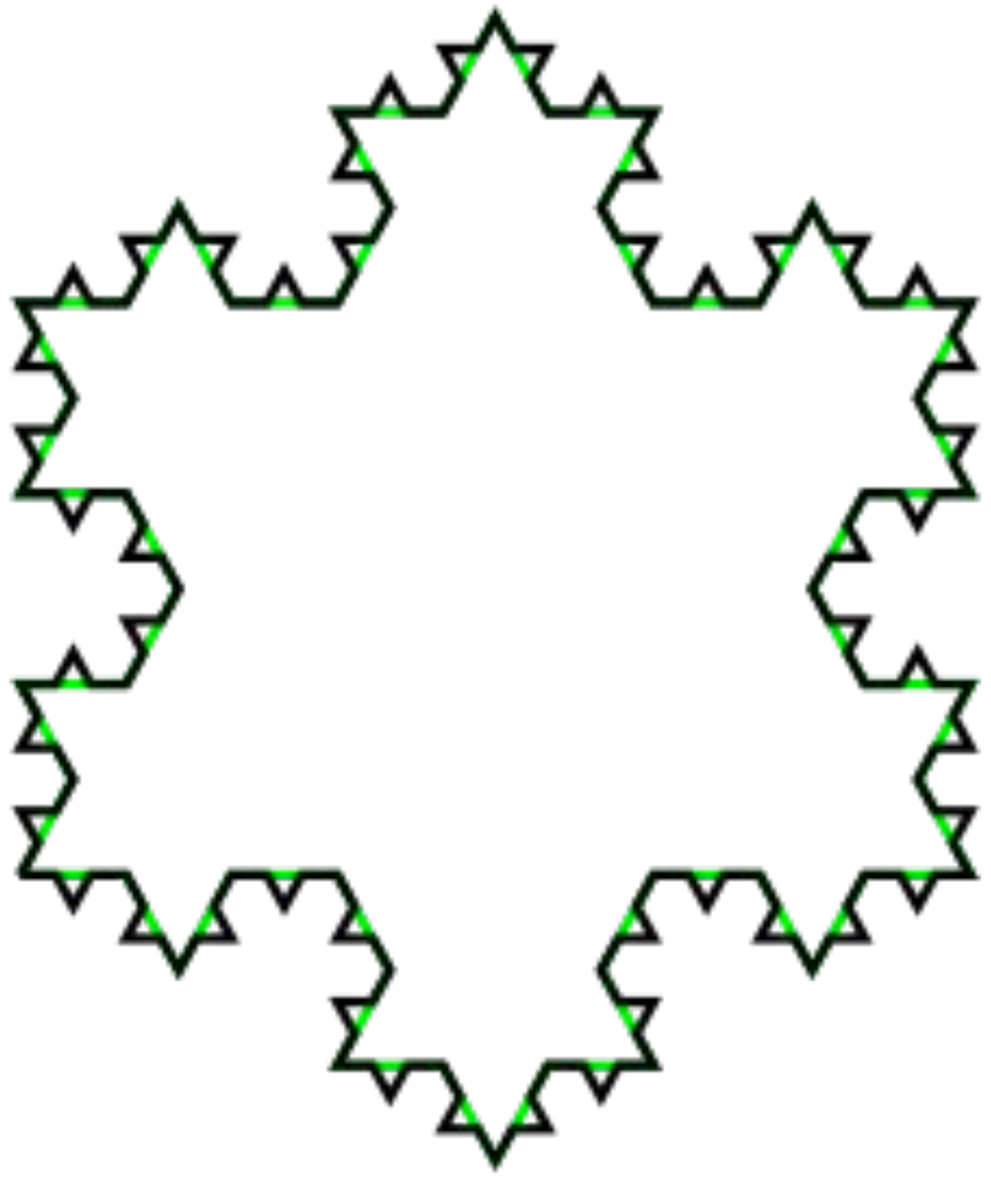


Il fiocco di Koch è il "limite" di queste "curve"...

F_2



F_3



Perimetro del fiocco di Koch

Perimetro del fiocco di Koch

$\boldsymbol{p_n := \textbf{perimetro di } F_n}$

Perimetro del fiocco di Koch

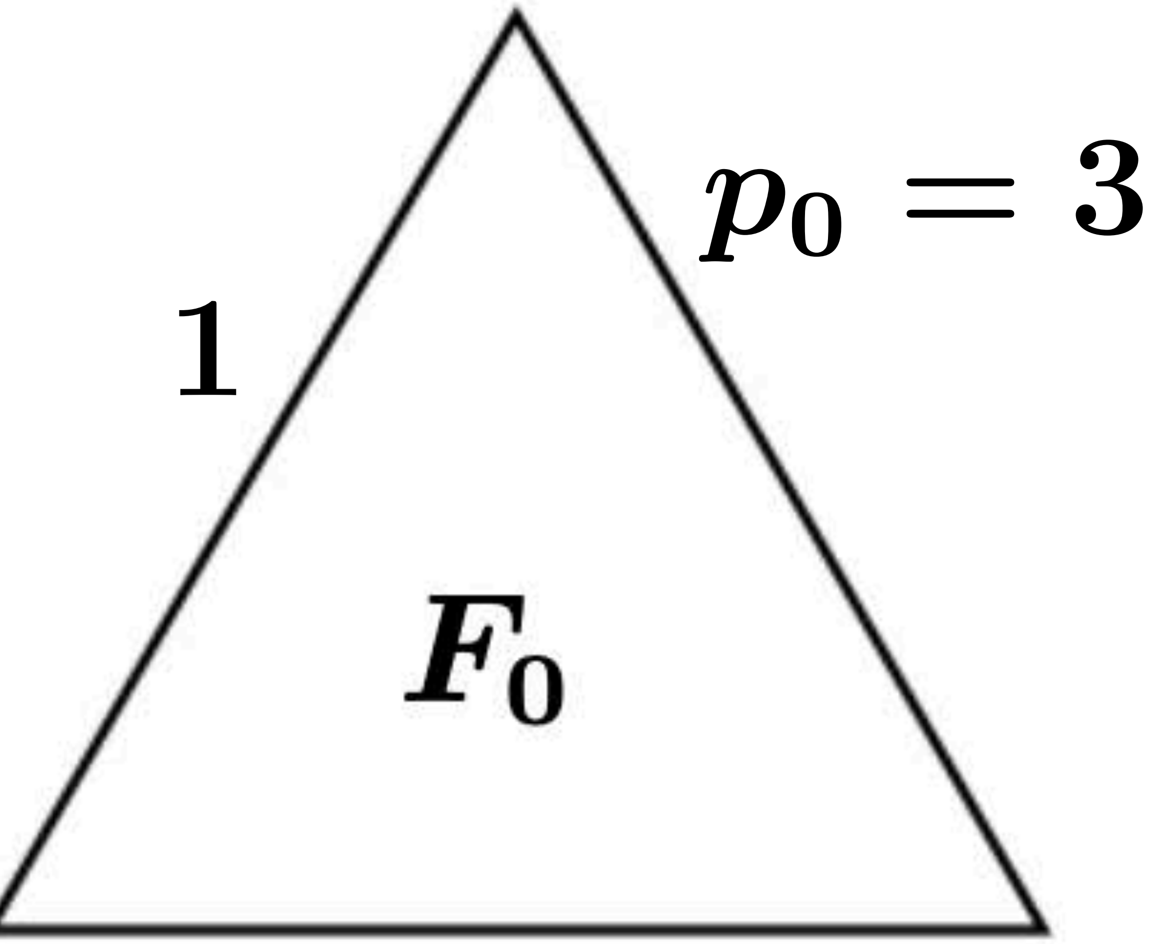
$\boldsymbol{p_n :=}$ **perimetro di** $\boldsymbol{F_n}$

Ricavare $\boldsymbol{p_{n+1}}$ **in funzione di** $\boldsymbol{p_n}$

Perimetro del fiocco di Koch

$p_n :=$ **perimetro di** F_n

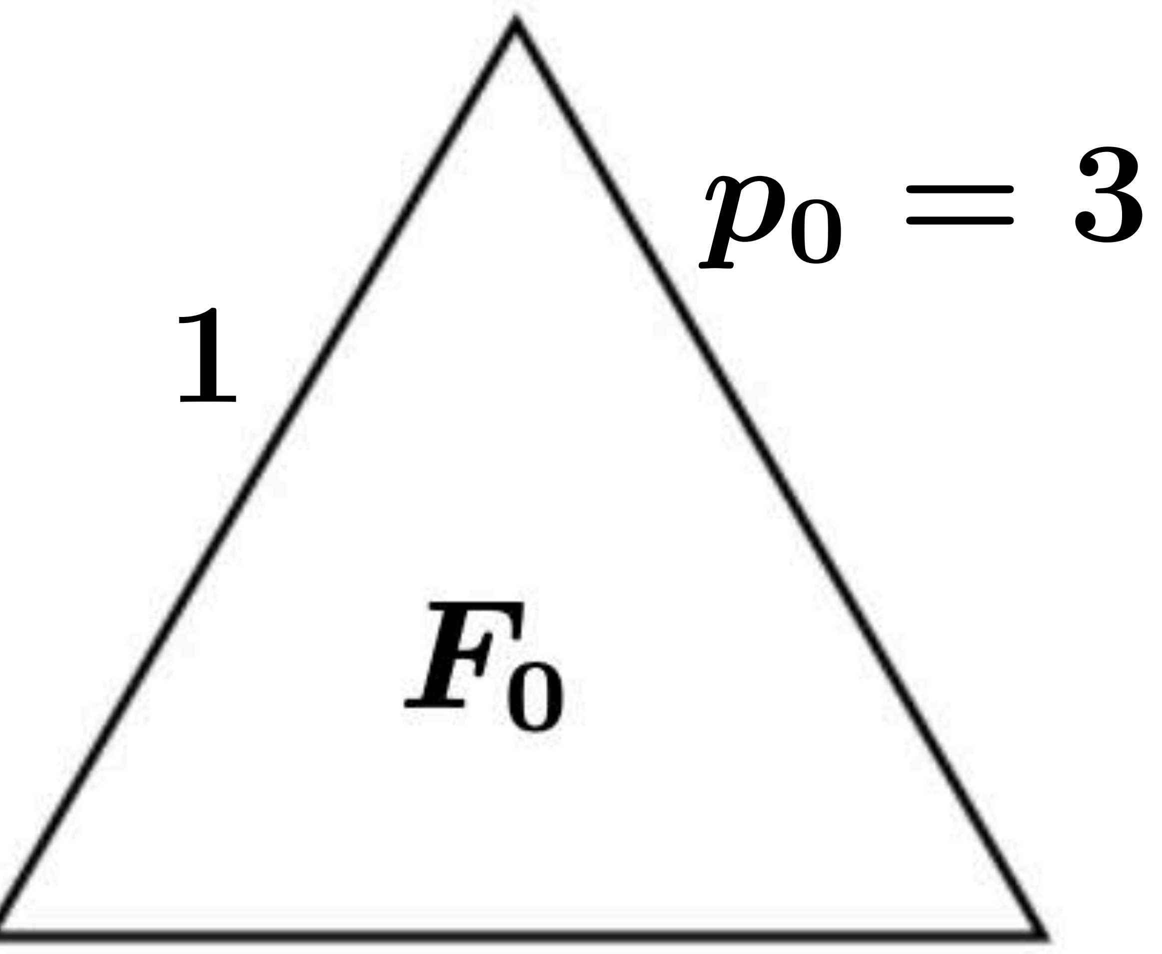
Ricavare p_{n+1} **in funzione di** p_n

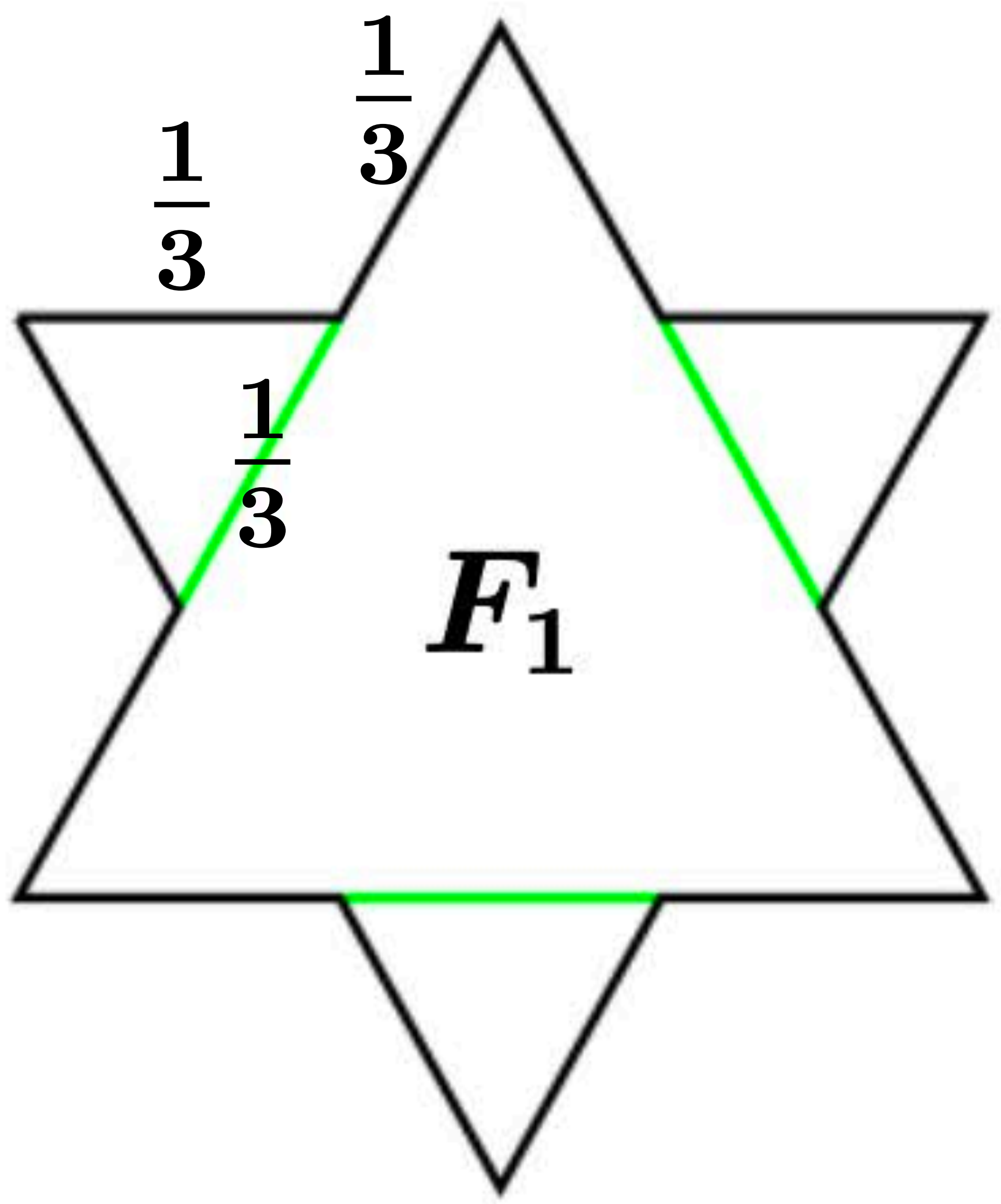


Perimetro del fiocco di Koch

$p_n :=$ **perimetro di** F_n

Ricavare p_{n+1} **in funzione di** p_n

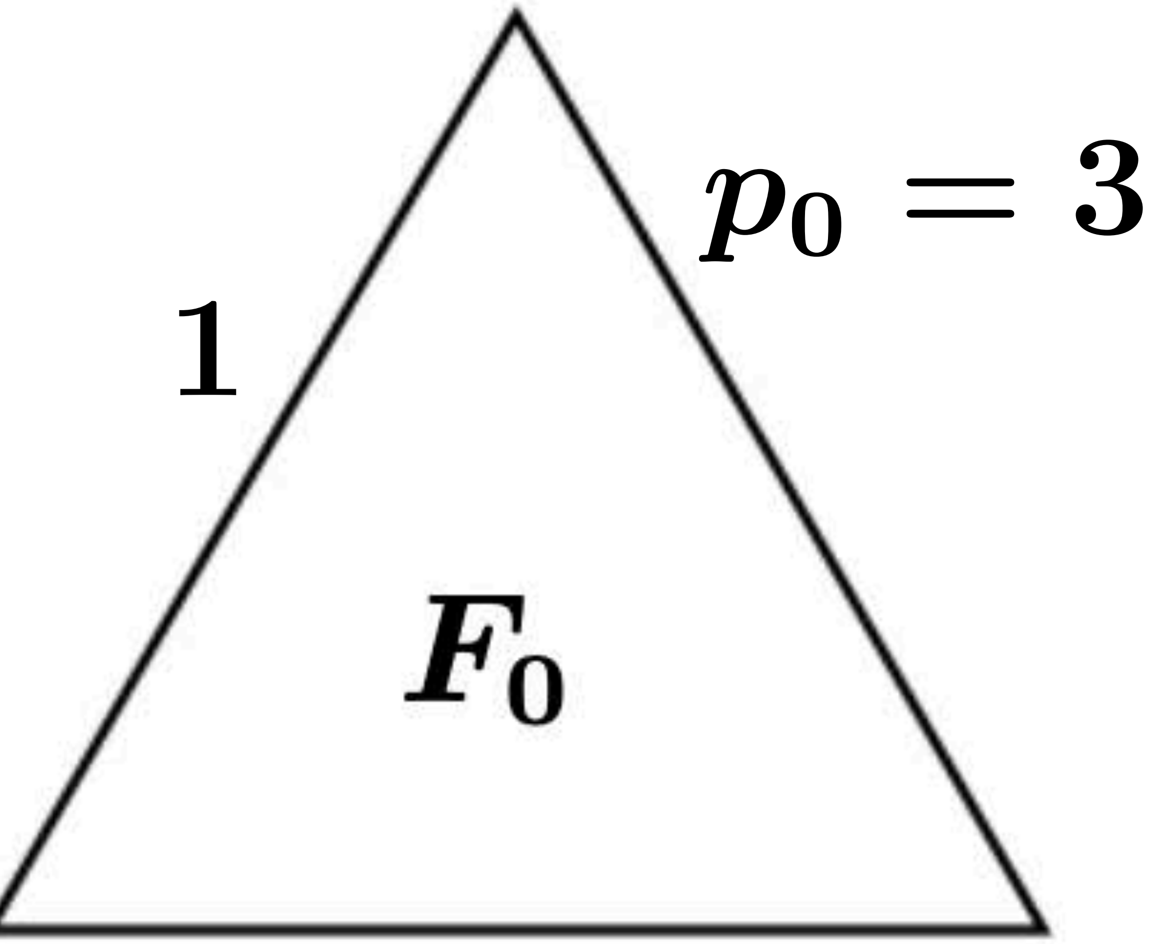


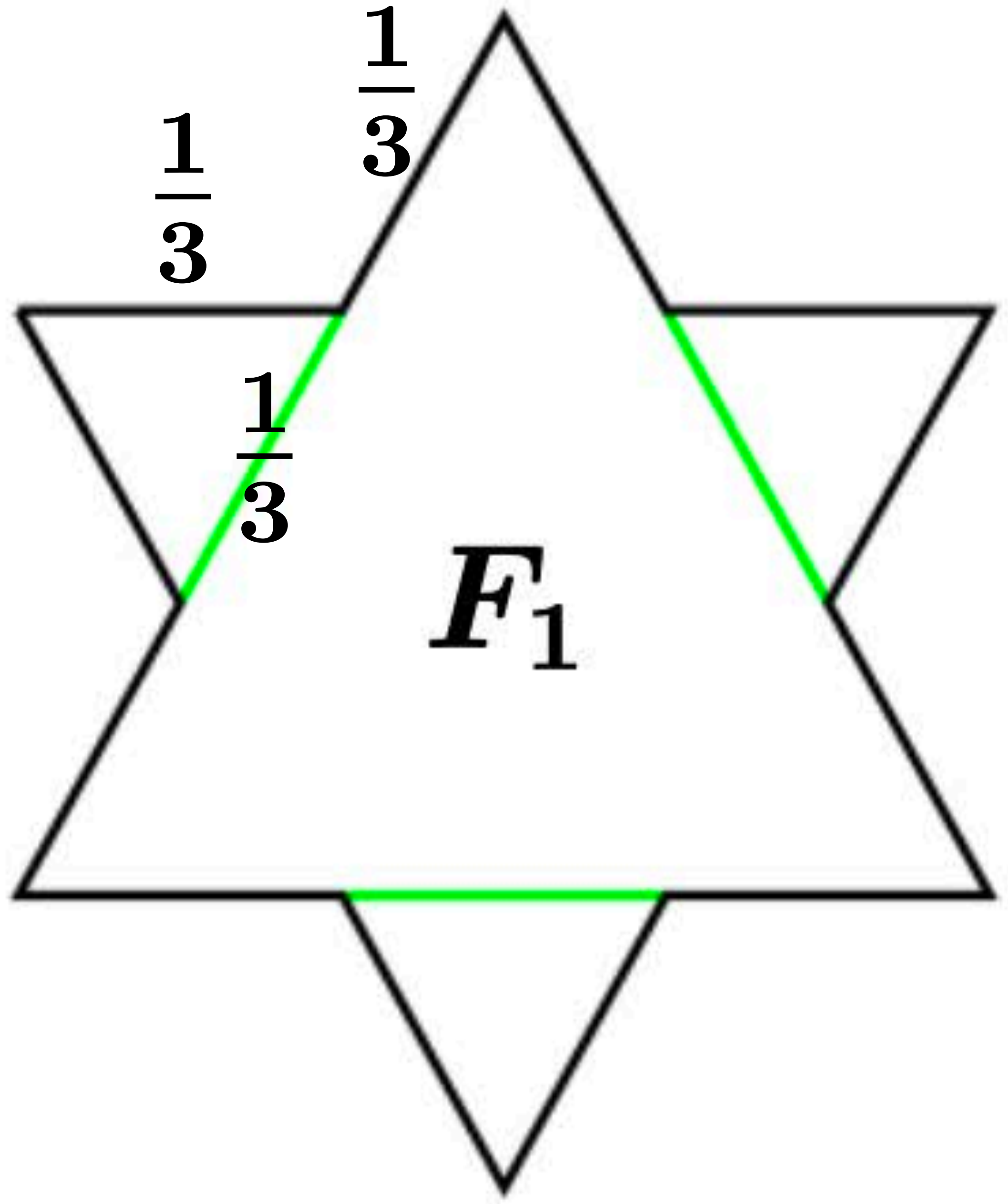


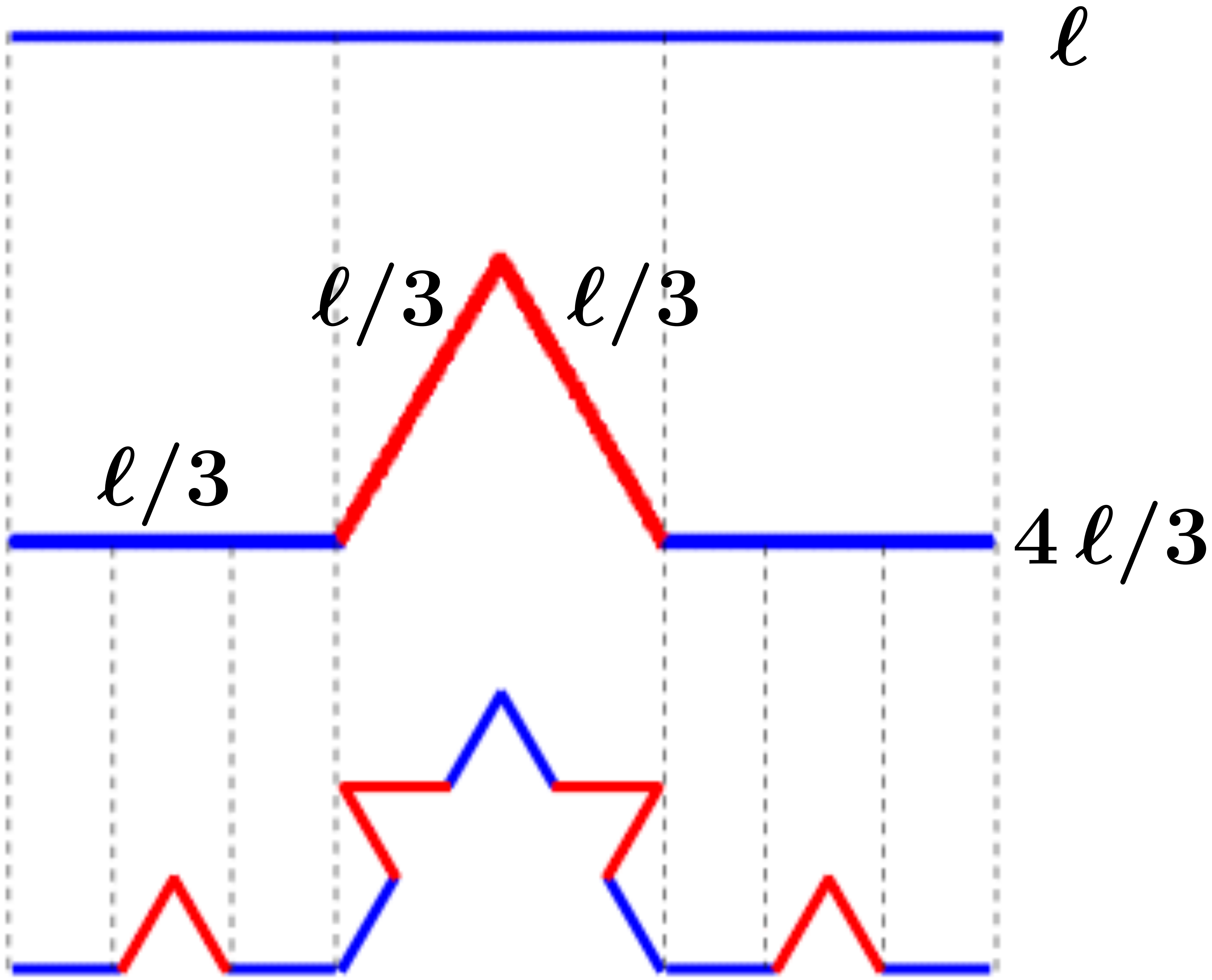
Perimetro del fiocco di Koch

$p_n :=$ perimetro di F_n

Ricavare p_{n+1} in funzione di p_n



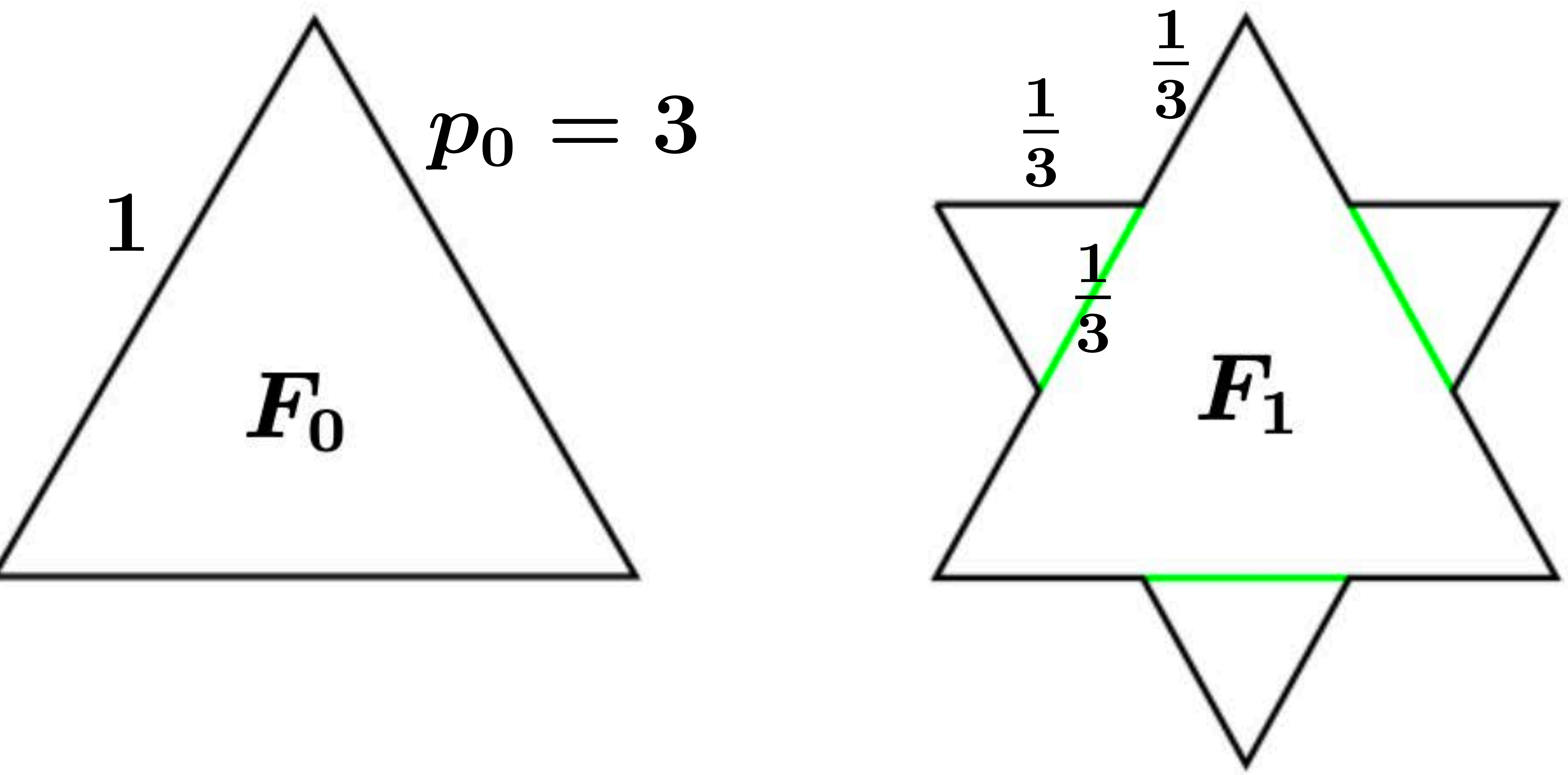


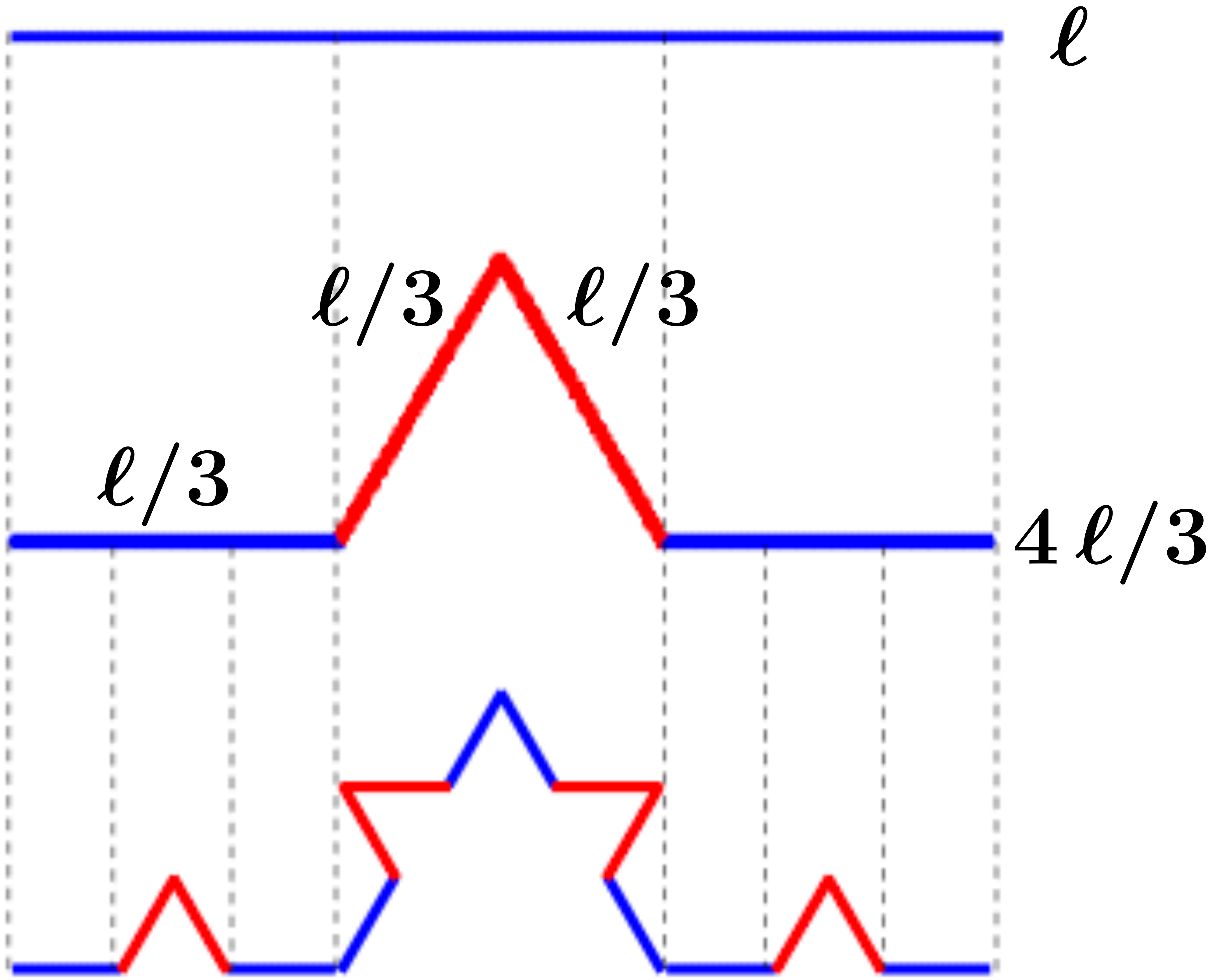


Perimetro del fiocco di Koch

$p_n :=$ perimetro di F_n

Ricavare p_{n+1} in funzione di p_n



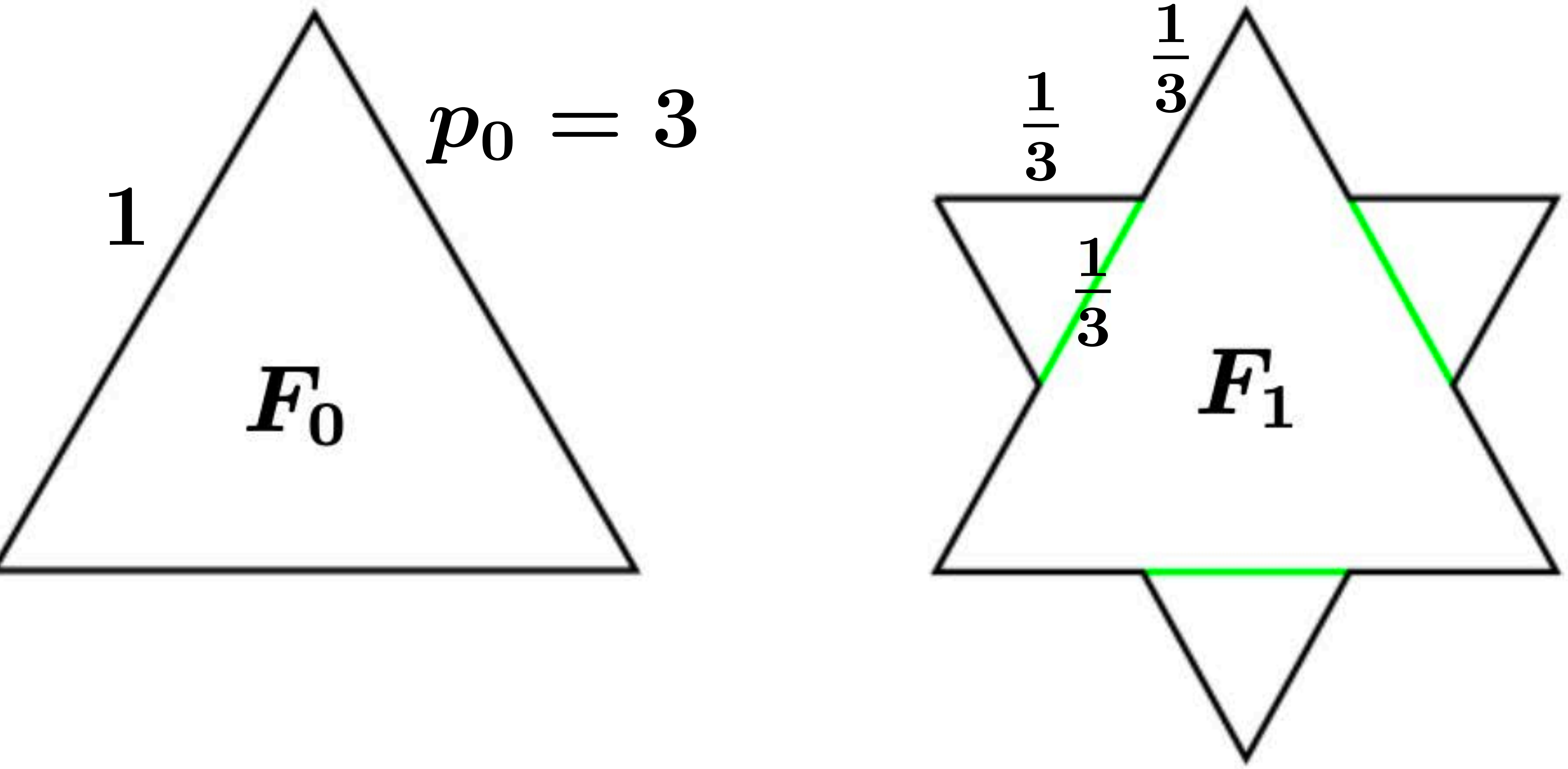


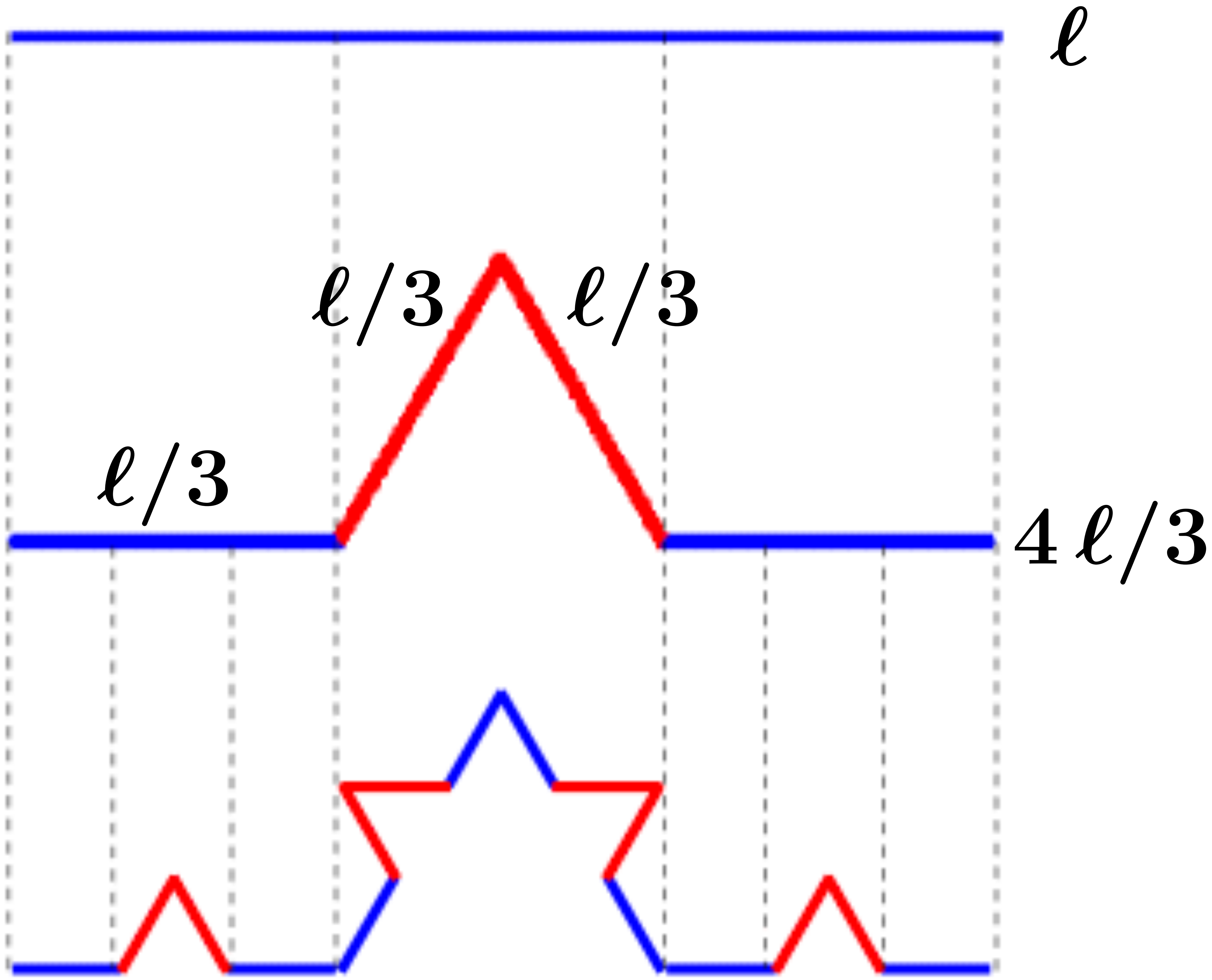
a) Ogni segmento del bordo di lunghezza ℓ di F_n viene diviso in 3 pezzi

Perimetro del fiocco di Koch

$p_n :=$ perimetro di F_n

Ricavare p_{n+1} in funzione di p_n



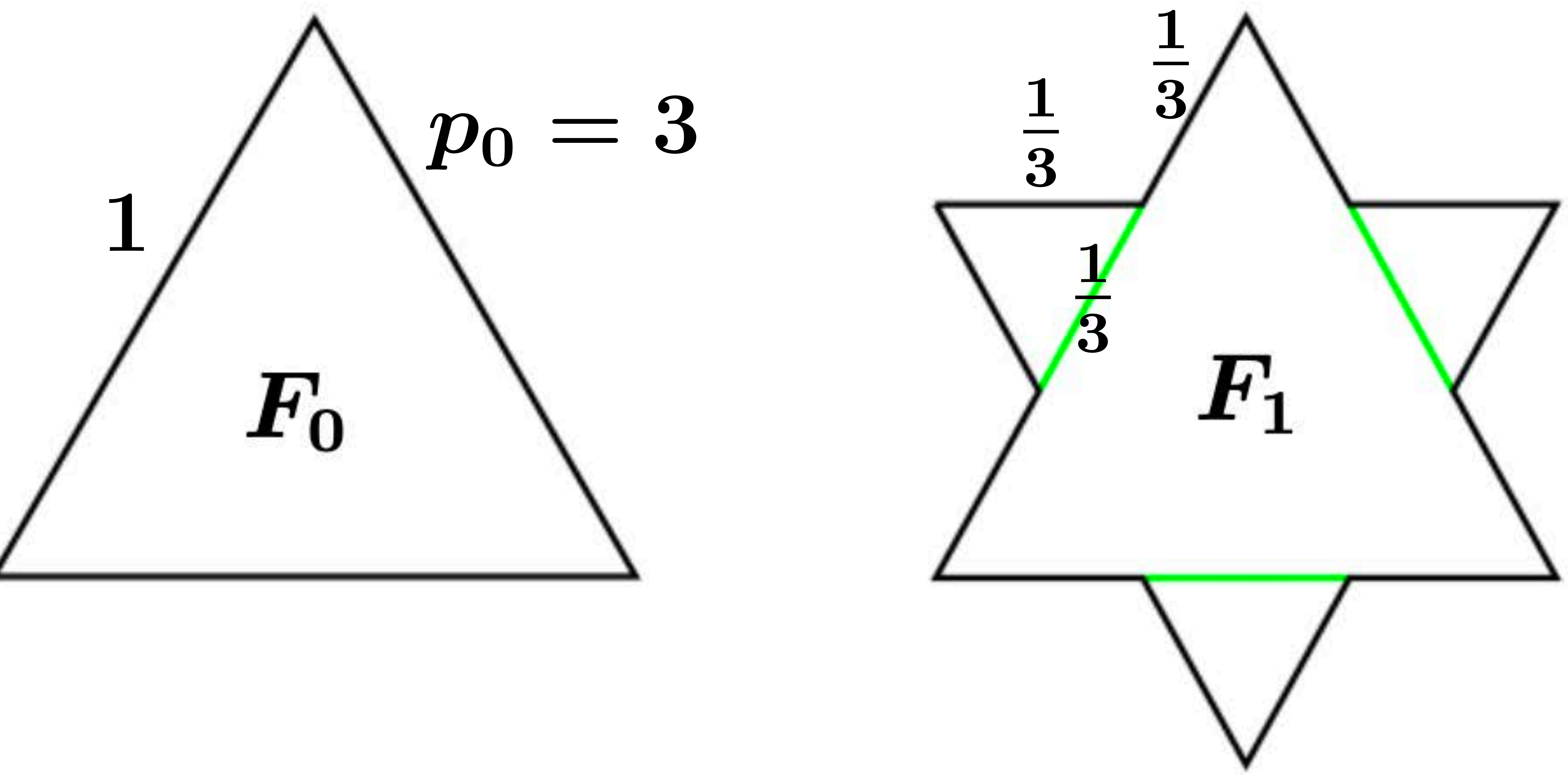


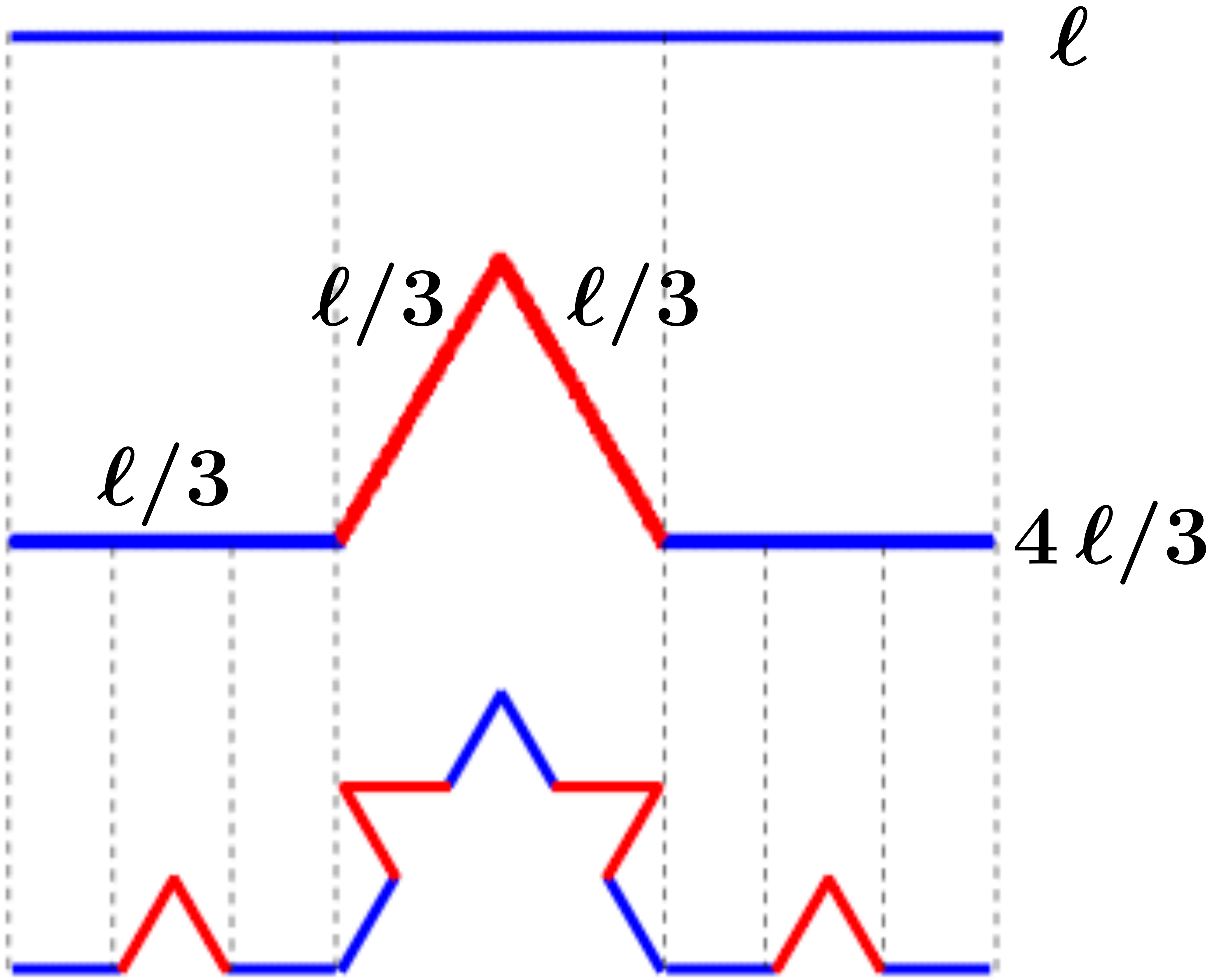
a) Ogni segmento del bordo di lunghezza ℓ di F_n viene diviso in 3 pezzi
b) In corrispondenza di ogni lato di F_n di lunghezza ℓ, F_{n+1} ha 4 lati di lunghezza $\ell/3$

Perimetro del fiocco di Koch

$p_n :=$ **perimetro di** F_n

Ricavare p_{n+1} **in funzione di** p_n





a) Ogni segmento del bordo di lunghezza ℓ **di** F_n **viene diviso in 3 pezzi**

b) In corrispondenza di ogni lato di F_n **di lunghezza** ℓ, F_{n+1} **ha 4 lati di lunghezza** $\ell/3$ $\quad p_{n+1} = \frac{4}{3} p_n$

Perimetro del fiocco di Koch

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{4}{3} p_n \\ p_0 = 3 \end{cases}$$

Perimetro del fiocco di Koch

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{4}{3} p_n \\ p_0 = 3 \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{4}{3} 3$$

Perimetro del fiocco di Koch

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{4}{3} p_n \\ p_0 = 3 \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{4}{3} 3$$

$$p_2 = \frac{4}{3} p_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 3$$

Perimetro del fiocco di Koch

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{4}{3} p_n \\ p_0 = 3 \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{4}{3} 3$$

$$p_2 = \frac{4}{3} p_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 3$$

$$p_3 = \frac{4}{3} p_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 3$$

Perimetro del fiocco di Koch

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{4}{3} p_n \\ p_0 = 3 \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{4}{3} 3 \qquad p_2 = \frac{4}{3} p_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 3$$

$$p_3 = \frac{4}{3} p_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 3$$

…………………………………

$$p_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n 3$$

Perimetro del fiocco di Koch

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{4}{3} p_n \\ p_0 = 3 \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{4}{3} 3 \qquad p_2 = \frac{4}{3} p_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 3$$

$$p_3 = \frac{4}{3} p_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 3$$

………………………………….

$$p_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n 3 \longrightarrow +\infty \text{ per } n \to +\infty$$

Perimetro del fiocco di Koch

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{4}{3}p_n \\ p_0 = 3 \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{4}{3}3 \qquad p_2 = \frac{4}{3}p_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 3$$

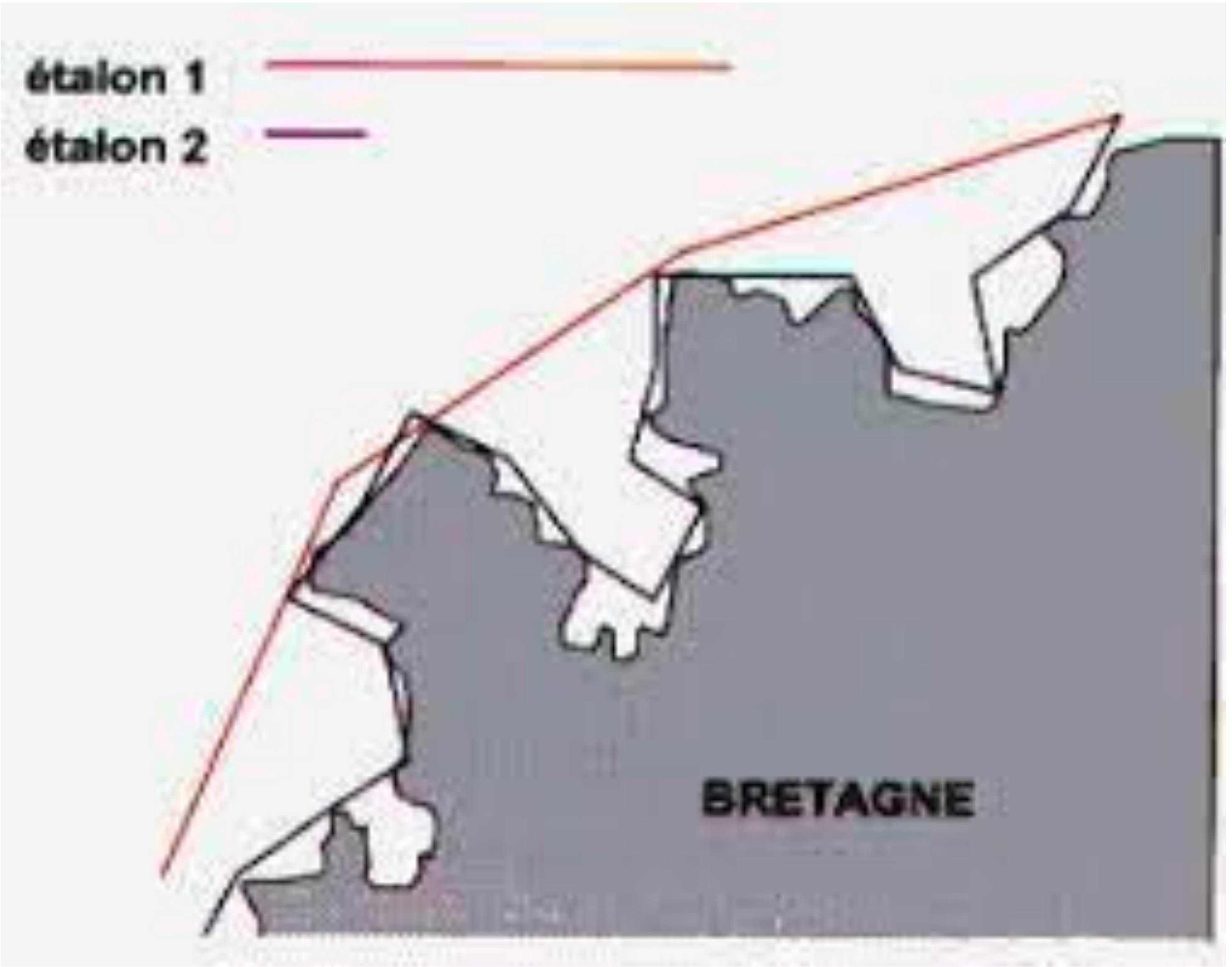
$$p_3 = \frac{4}{3}p_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 3$$

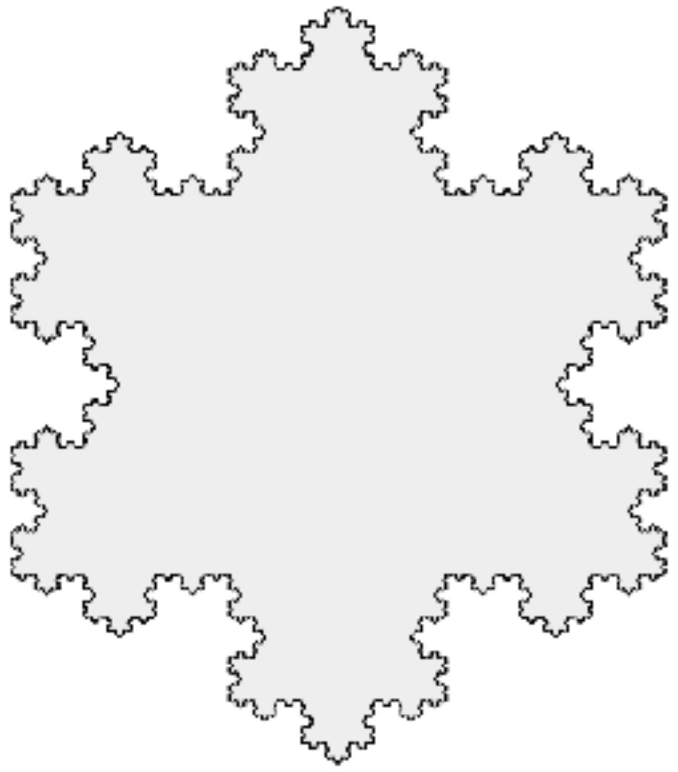
....

$$p_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n 3 \longrightarrow +\infty \text{ per } n \to +\infty$$

Il perimetro 1-dimensionale della curva di Koch è infinito

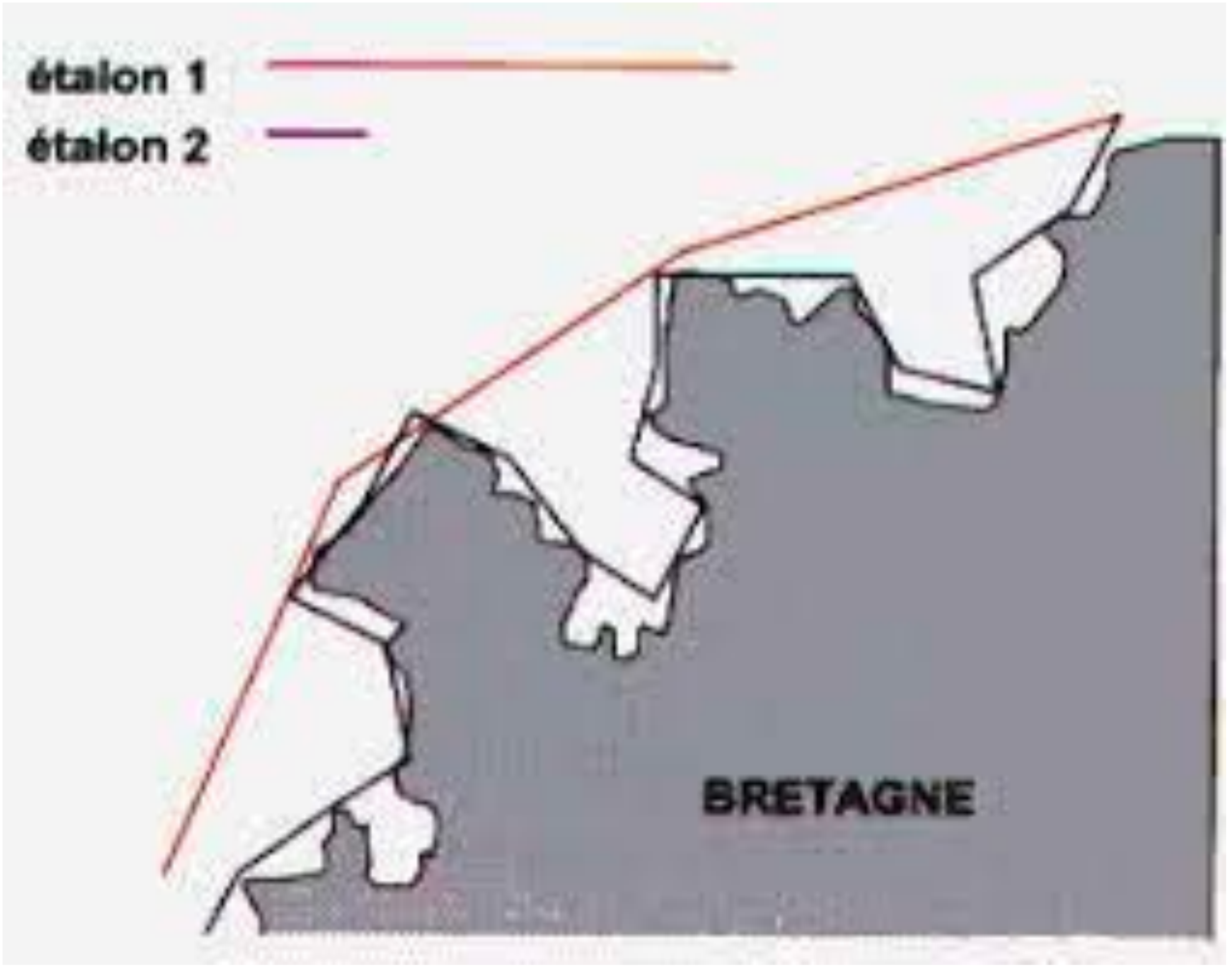
Quant'è lunga la costa della Bretagne? Lunghezza infinita?

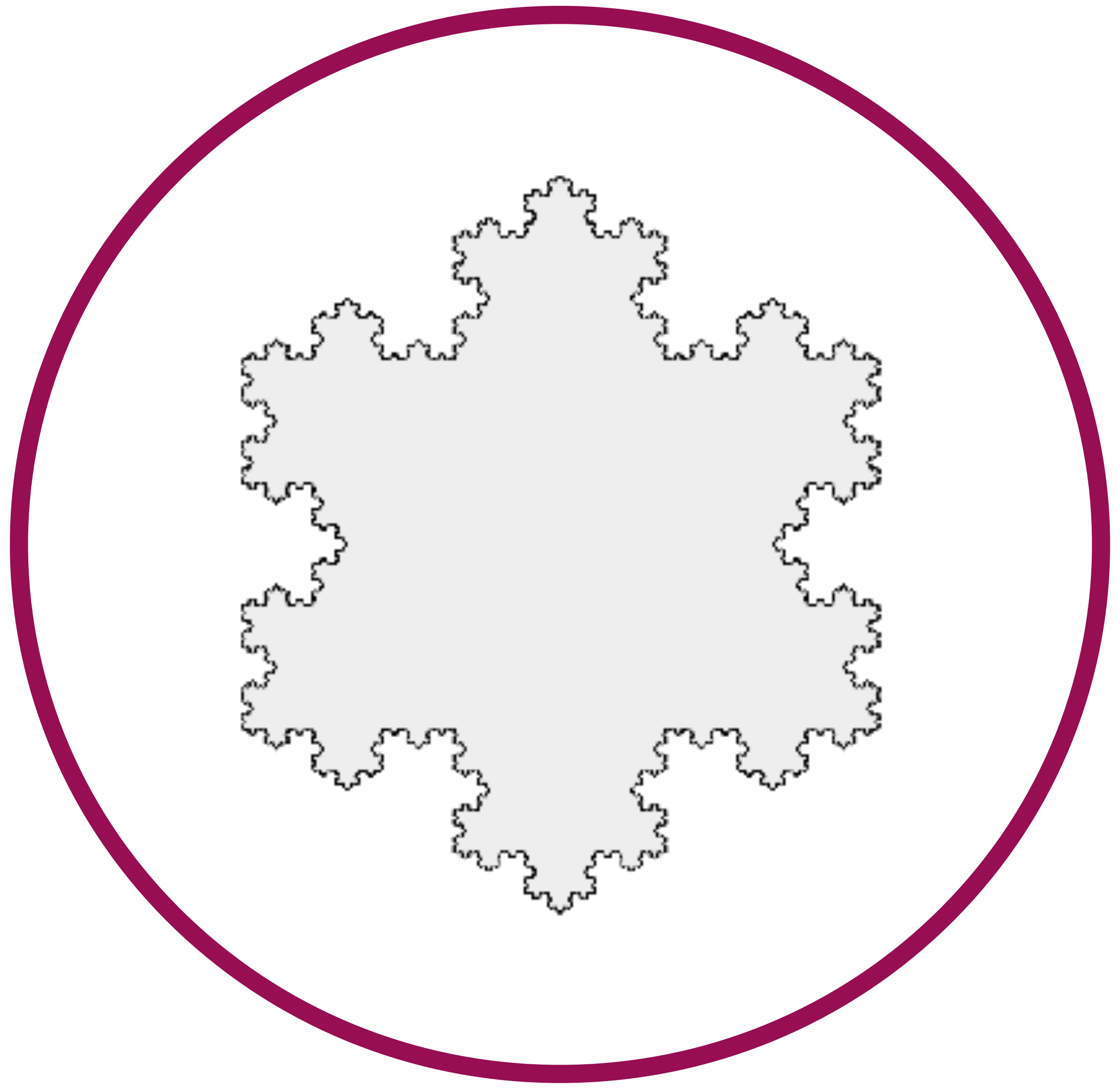




Quant'è lunga la costa della Bretagne? Lunghezza infinita?

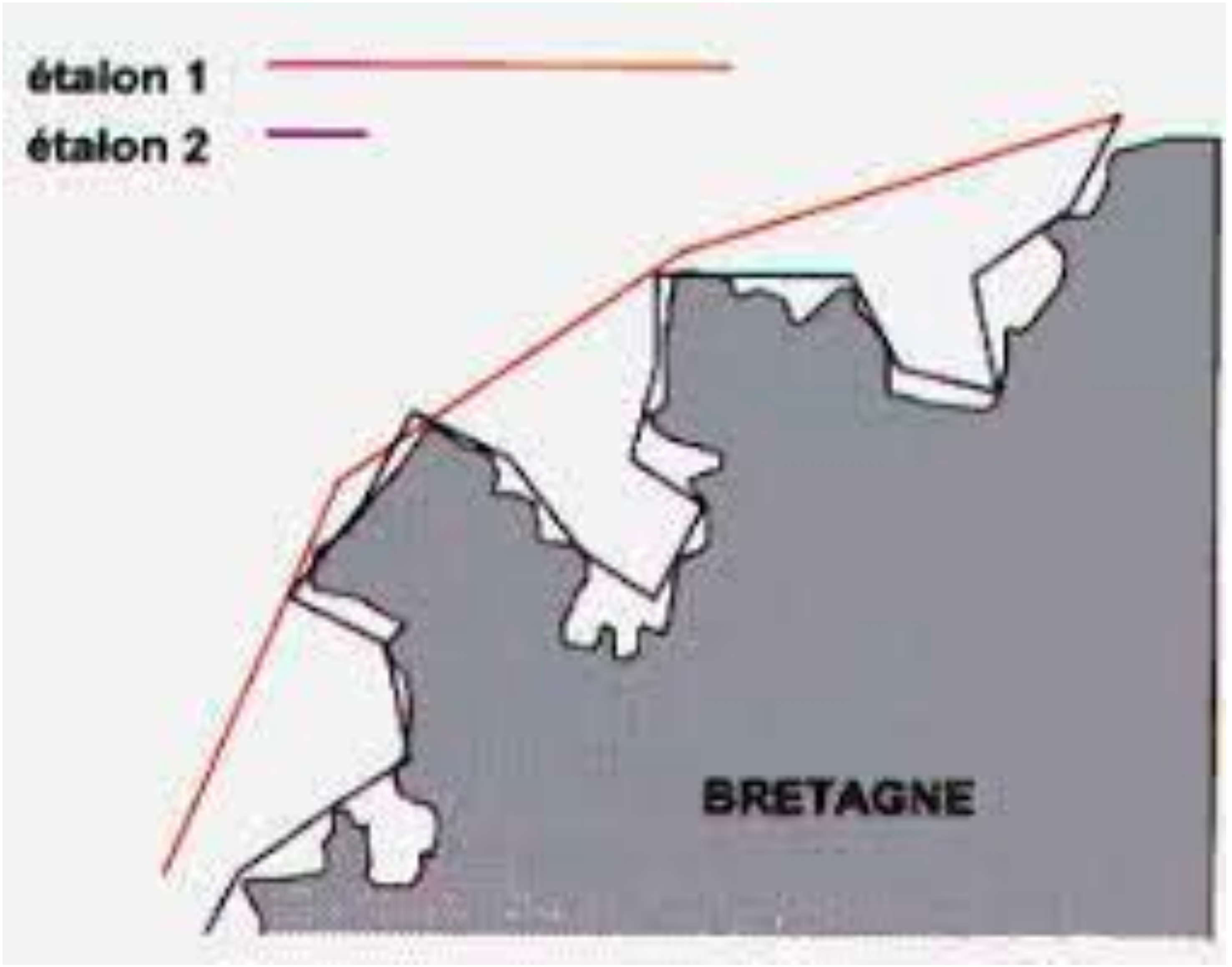
Come la Bretagne, il dominio racchiuso dalla curva di Koch ha area finita: infatti essa è racchiusa da un disco!

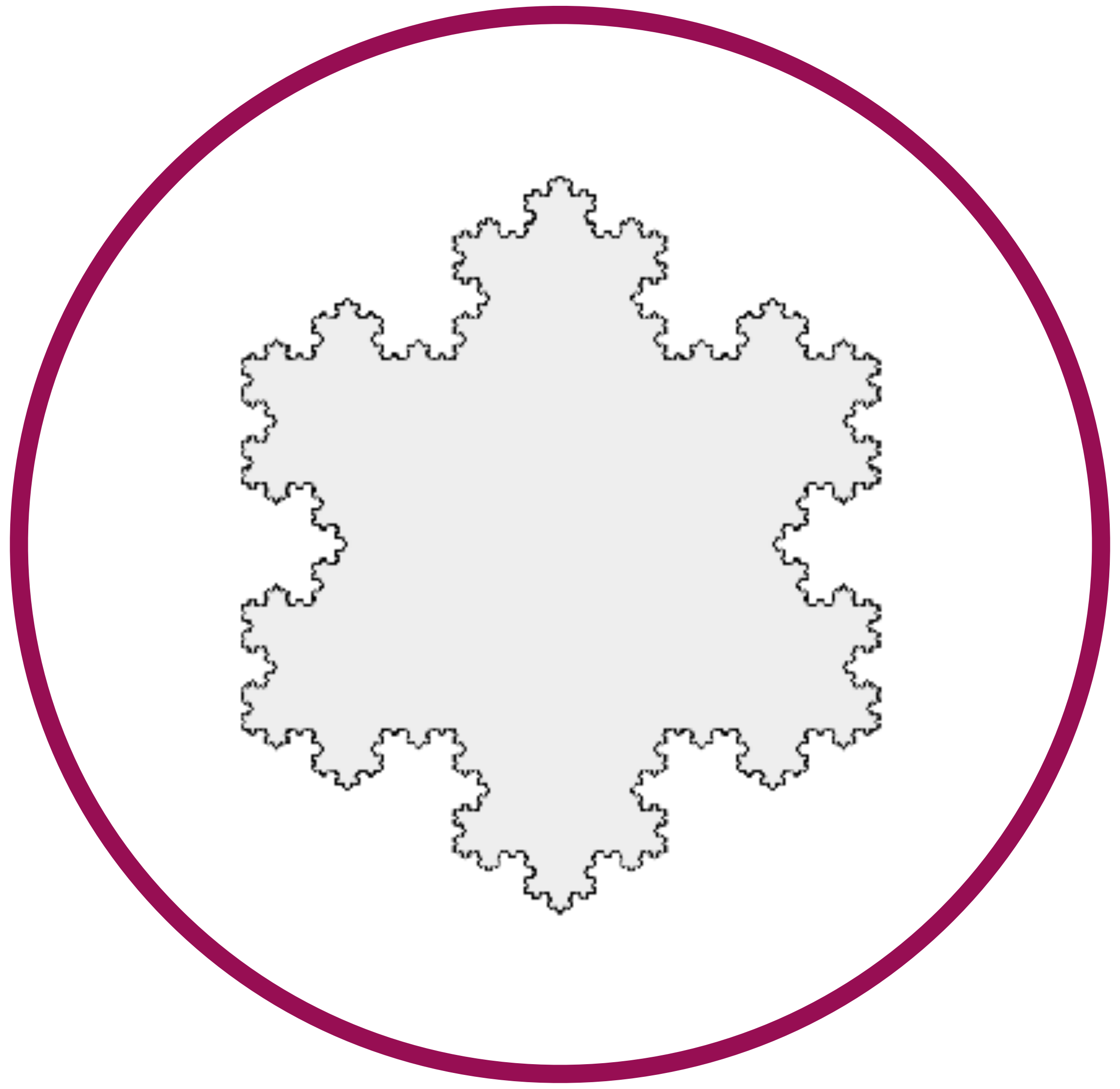




Quant'è lunga la costa della Bretagne? Lunghezza infinita?

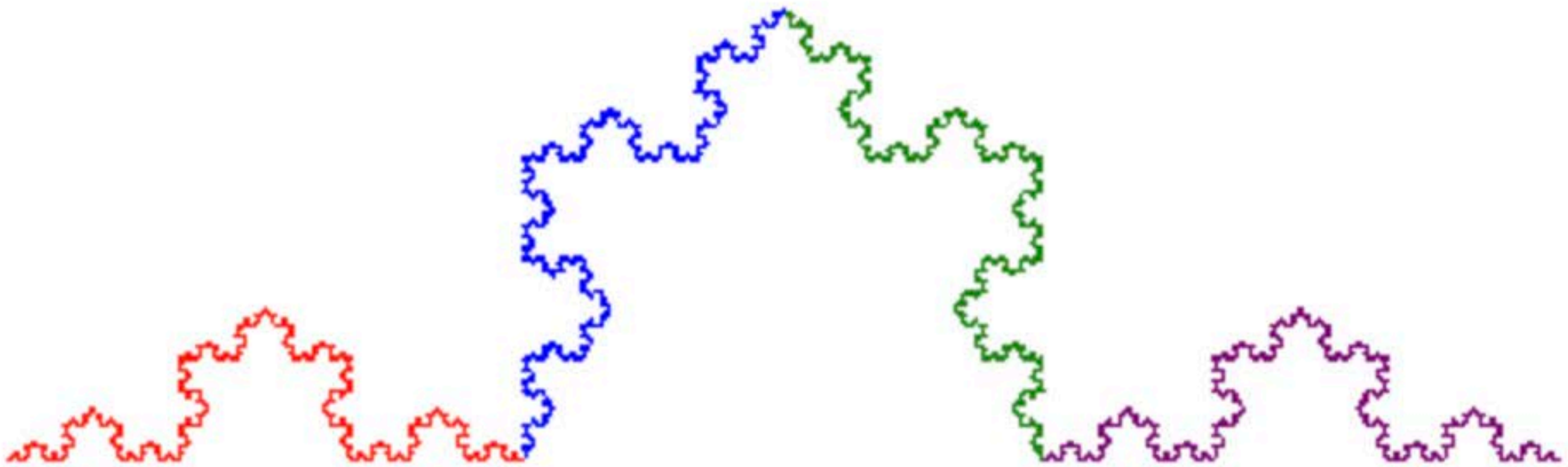
Come la Bretagne, il dominio racchiuso dalla curva di Koch ha area finita: infatti essa è racchiusa da un disco!



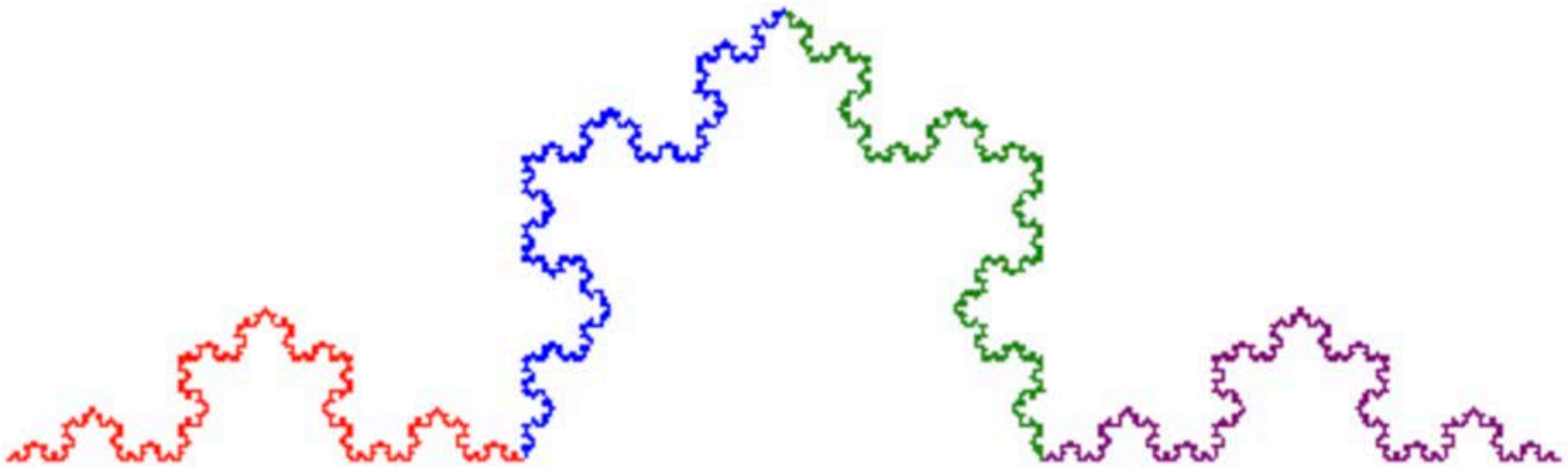


L'area della curva di Koch vale 0

Dimensione del fiocco di Koch ?

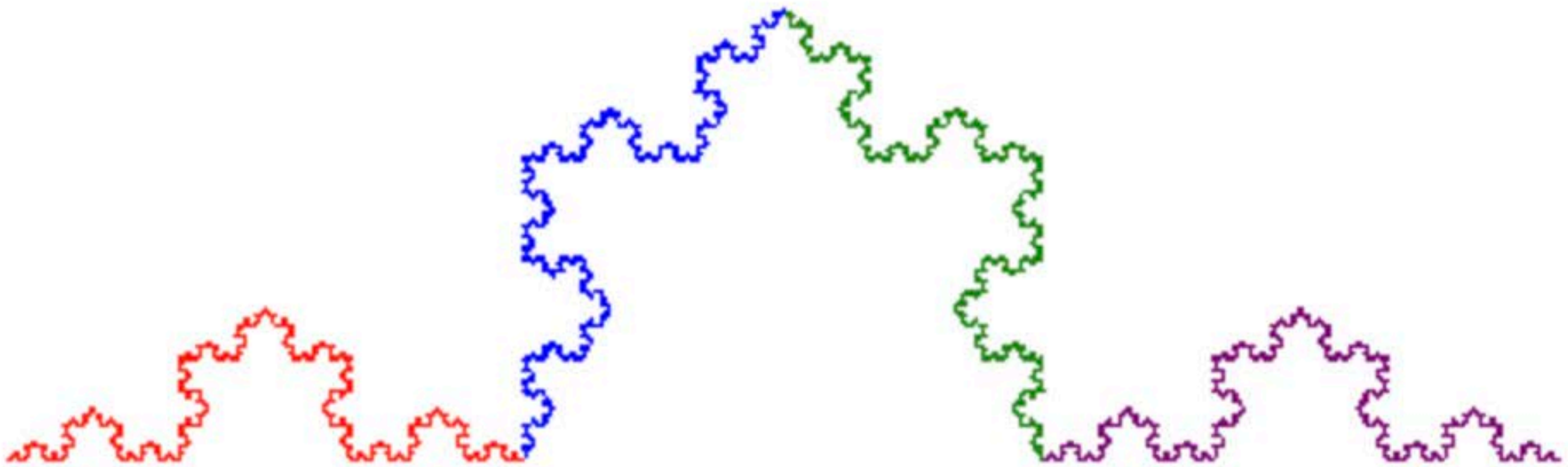


Dimensione del fiocco di Koch ?



1) La lente che misura le lunghezze dei segmenti (dim=1) la vede infinita

Dimensione del fiocco di Koch ?



1) La lente che misura le lunghezze dei segmenti (dim=1) la vede infinita

2) La lente che misura le aree dei rettangolo (dim=2) la vede nulla

Come funziona la misura in dimensione d = 0, 1, 2?

Come funziona la misura in dimensione *d* = 0, 1, 2?

$\boldsymbol{\lambda_0}$**: misura 0-dimensionale (che conta i punti):** $\boldsymbol{\lambda_0(\{A_1, ..., A_n\}) = n.}$

Come funziona la misura in dimensione *d* = 0, 1, 2?

$\boldsymbol{\lambda_0}$: **misura 0-dimensionale (che conta i punti):** $\boldsymbol{\lambda_0(\{A_1, ..., A_n\}) = n.}$

$\boldsymbol{\lambda_1}$: **misura 1-dimensionale** $\quad \boldsymbol{\lambda_1([a, b]) = b - a}$

Come funziona la misura in dimensione *d* = 0, 1, 2?

$\boldsymbol{\lambda_0}$: **misura 0-dimensionale (che conta i punti):** $\boldsymbol{\lambda_0(\{A_1, ..., A_n\}) = n.}$

$\boldsymbol{\lambda_1}$: **misura 1-dimensionale** $\boldsymbol{\lambda_1([a, b]) = b - a}$

$\boldsymbol{\lambda_2}$: **misura 2-dimensionale (area)** $\boldsymbol{\lambda_2(A) = \textbf{Area di } A \subset \mathbb{R}^2}$

Come funziona la misura in dimensione *d* = 0, 1, 2?

$\boldsymbol{\lambda_0}$: **misura 0-dimensionale (che conta i punti):** $\boldsymbol{\lambda_0(\{A_1, \ldots, A_n\}) = n.}$

$\boldsymbol{\lambda_1}$: **misura 1-dimensionale** $\quad \boldsymbol{\lambda_1([a, b]) = b - a}$

$\boldsymbol{\lambda_2}$: **misura 2-dimensionale (area)** $\boldsymbol{\lambda_2(A) = \textbf{Area di } A \subset \mathbb{R}^2}$

Proprietà (*d* = 0, 1 o 2)

Come funziona la misura in dimensione *d* = 0, 1, 2?

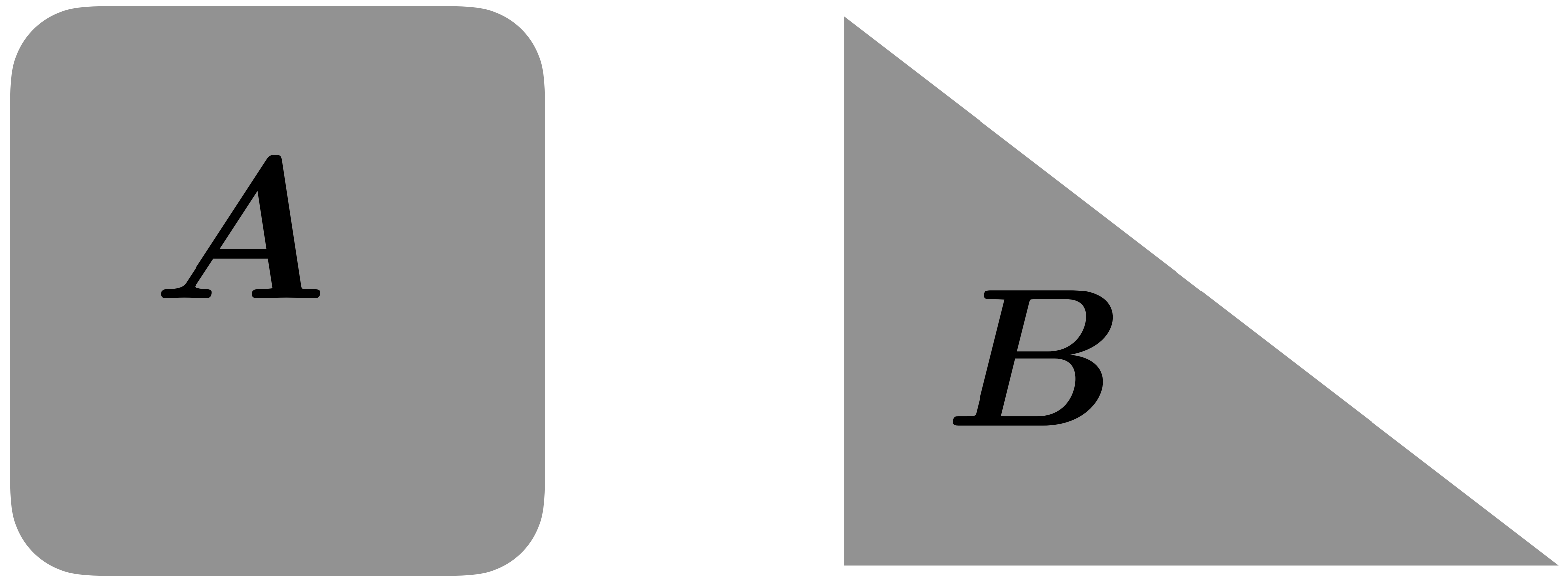
$\boldsymbol{\lambda_0}$: **misura 0-dimensionale (che conta i punti):** $\boldsymbol{\lambda_0(\{A_1, \ldots, A_n\}) = n.}$

$\boldsymbol{\lambda_1}$: **misura 1-dimensionale** $\boldsymbol{\lambda_1([a, b]) = b - a}$

$\boldsymbol{\lambda_2}$: **misura 2-dimensionale (area)** $\boldsymbol{\lambda_2(A) =}$ **Area di** $\boldsymbol{A \subset \mathbb{R}^2}$

Proprietà (*d* = 0, 1 o 2)

1) Se A, B sono disgiunti allora $\lambda_d(A \cup B) = \lambda_d(A) + \lambda_d(B)$



Come funziona la misura in dimensione *d* = 0, 1, 2?

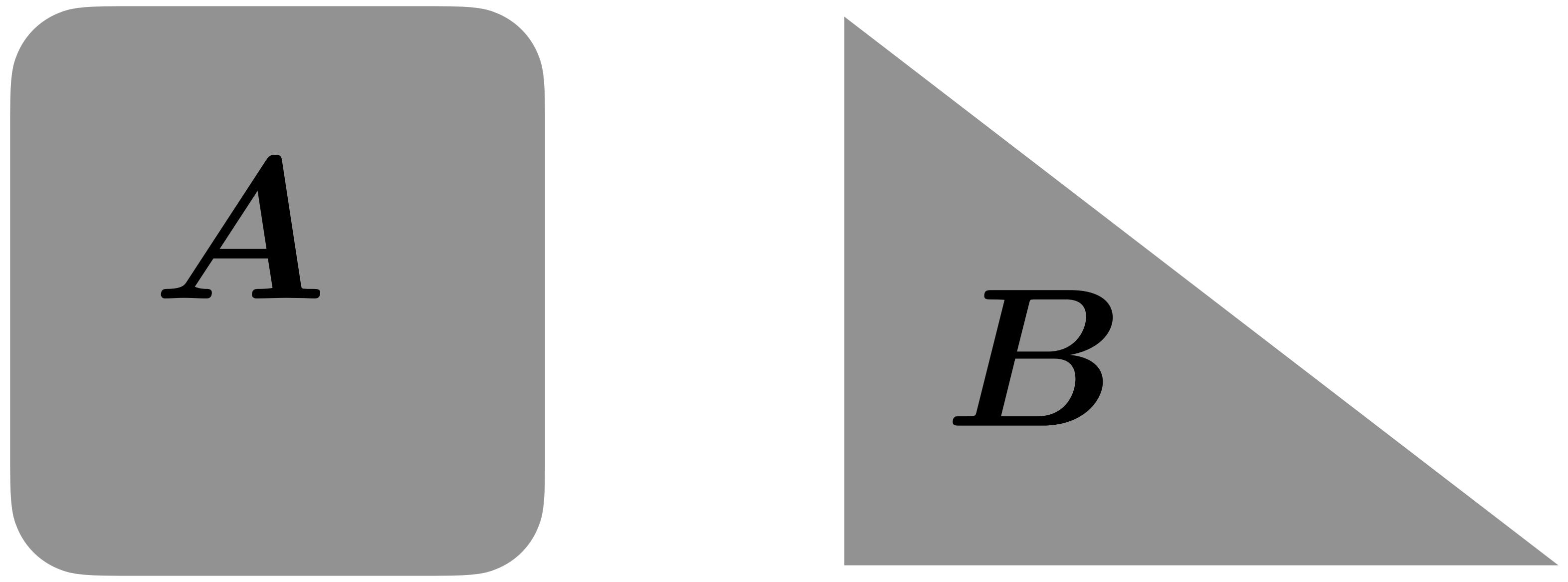
λ_0: misura 0-dimensionale (che conta i punti): $\lambda_0(\{A_1, \ldots, A_n\}) = n.$

λ_1: misura 1-dimensionale $\quad \lambda_1([a, b]) = b - a$

λ_2 : misura 2-dimensionale (area) $\;\lambda_2(A) = \text{Area di } A \subset \mathbb{R}^2$

Proprietà (*d* = 0, 1 o 2)

1) Se A, B sono disgiunti allora $\lambda_d(A \cup B) = \lambda_d(A) + \lambda_d(B)$



2) Se f è isometria allora $\lambda_d(f(A)) = \lambda_d(A)$

Come funziona la misura in dimensione d = 0, 1, 2?

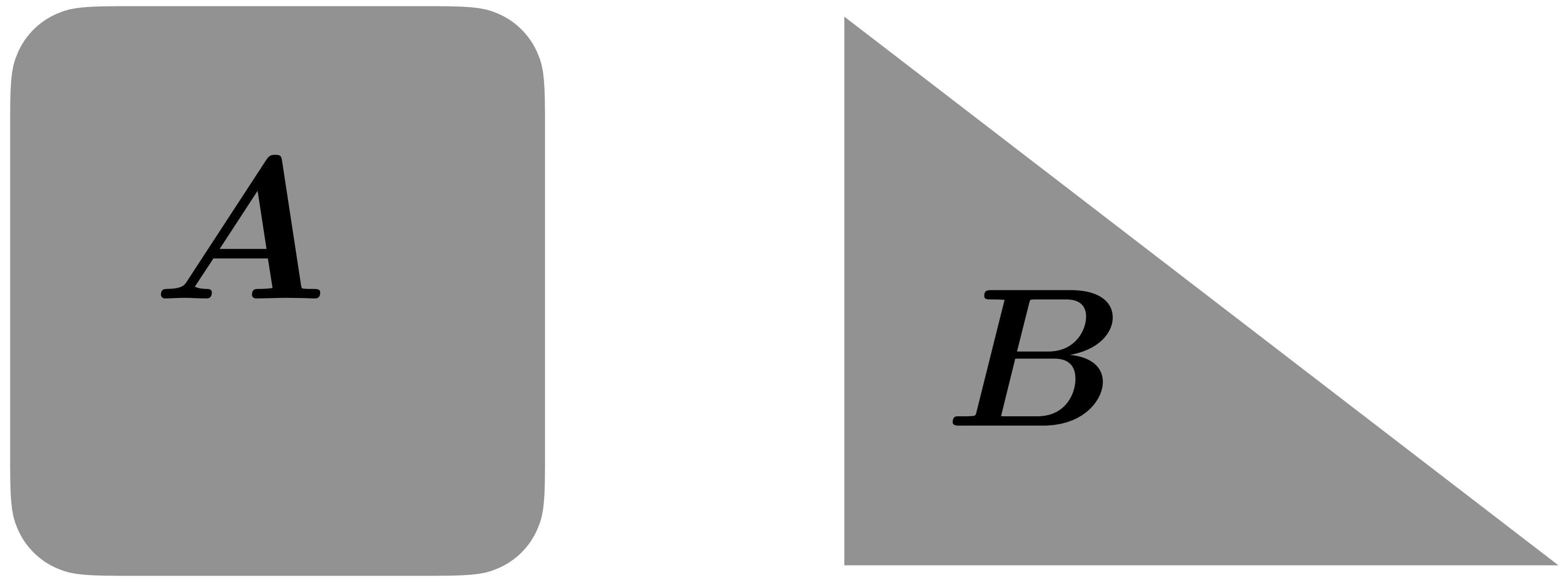
λ_0: misura 0-dimensionale (che conta i punti): $\lambda_0(\{A_1, ..., A_n\}) = n.$

λ_1: misura 1-dimensionale $\quad \lambda_1([a, b]) = b - a$

λ_2 : misura 2-dimensionale (area) $\lambda_2(A) =$ Area di $A \subset \mathbb{R}^2$

Proprietà (d = 0, 1 o 2)

1) Se A, B sono disgiunti allora $\lambda_d(A \cup B) = \lambda_d(A) + \lambda_d(B)$



2) Se f è isometria allora $\lambda_d(f(A)) = \lambda_d(A)$

3) Se $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$ allora $\lambda_d(a + bA) =$

Come funziona la misura in dimensione *d* = 0, 1, 2?

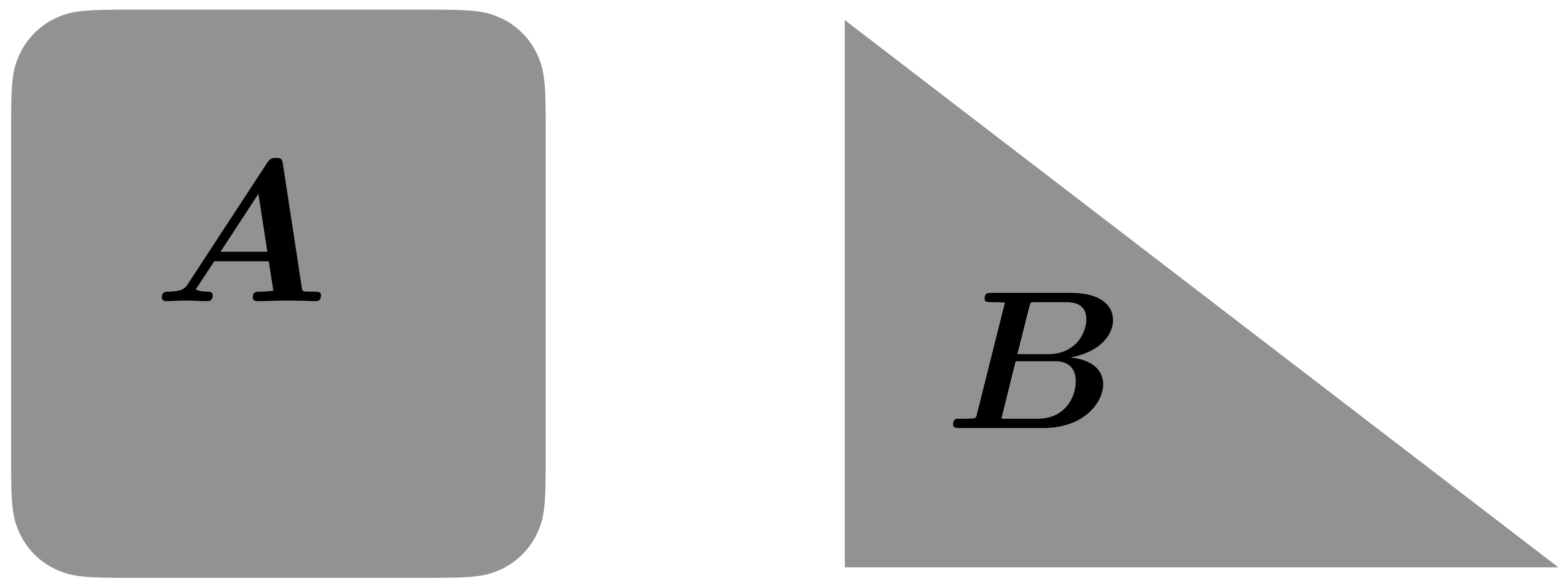
λ_0: misura 0-dimensionale (che conta i punti): $\lambda_0(\{A_1, \ldots, A_n\}) = n.$

λ_1: misura 1-dimensionale $\quad \lambda_1([a,b]) = b - a$

λ_2 : misura 2-dimensionale (area) $\lambda_2(A) = \text{Area di } A \subset \mathbb{R}^2$

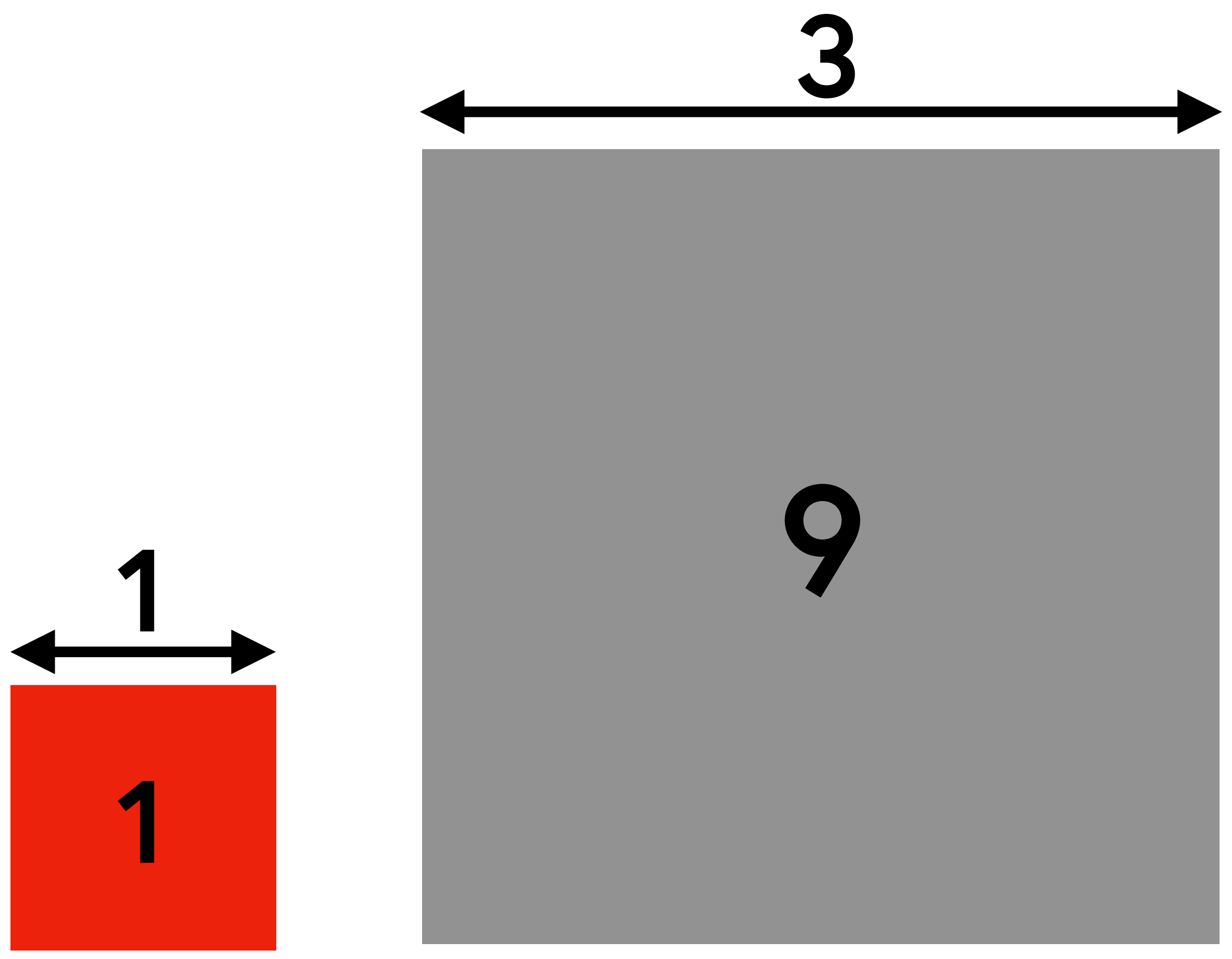
Proprietà (*d* = 0, 1 o 2)

1) Se A, B sono disgiunti allora $\lambda_d(A \cup B) = \lambda_d(A) + \lambda_d(B)$

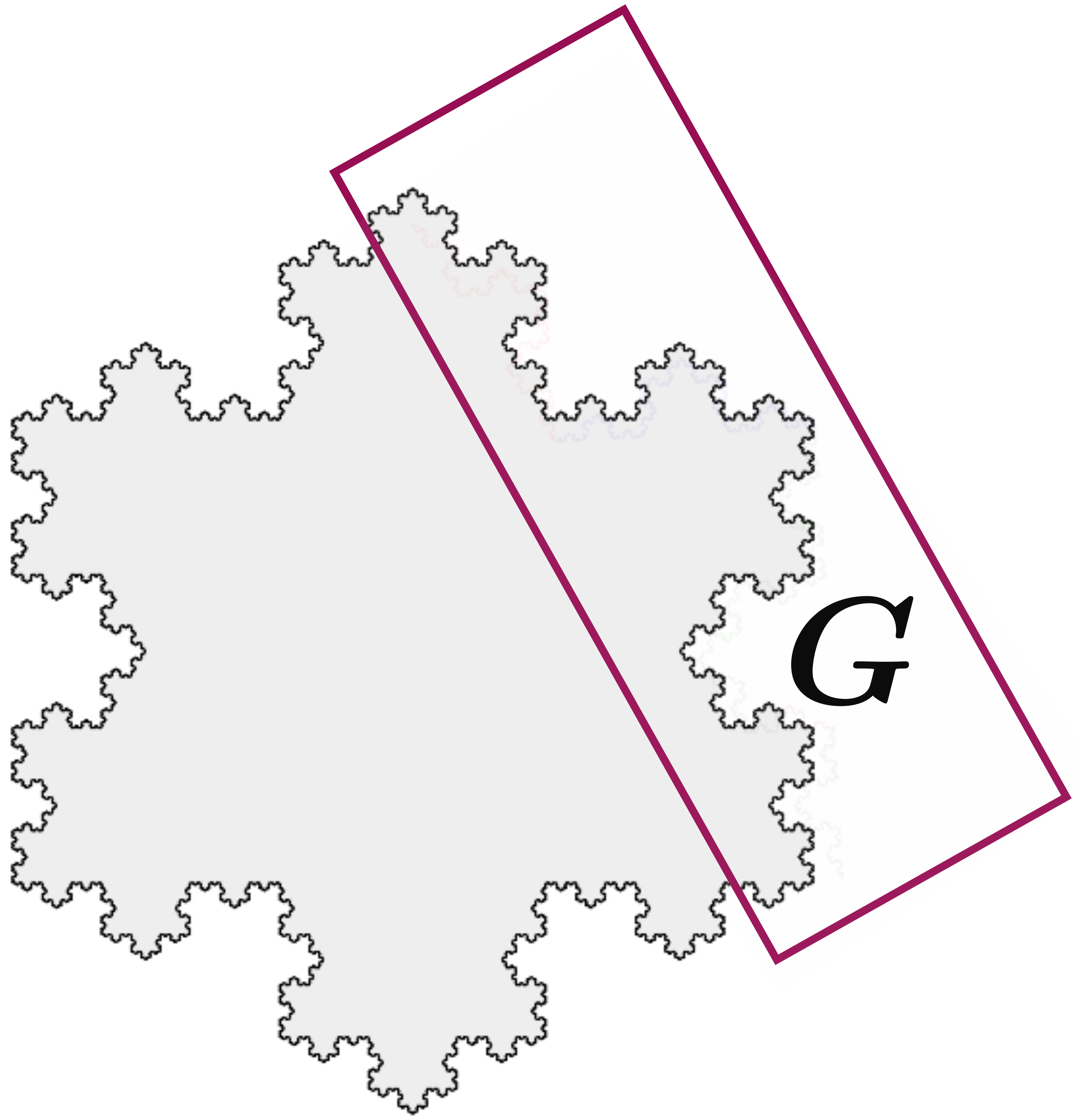


2) Se f è isometria allora $\lambda_d(f(A)) = \lambda_d(A)$

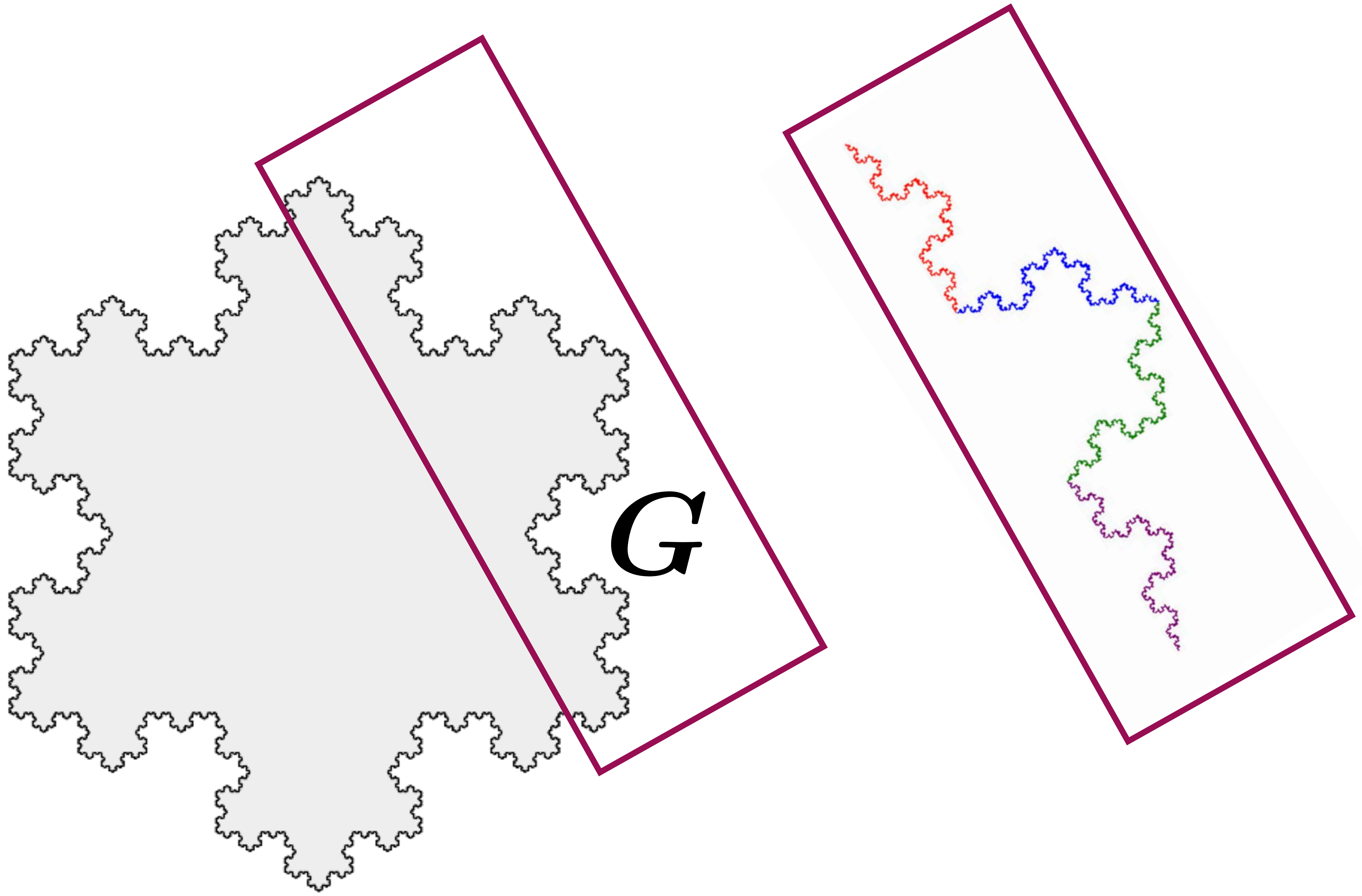
3) Se $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$ allora $\lambda_d(a + bA) = b^d \lambda_d(A)$.



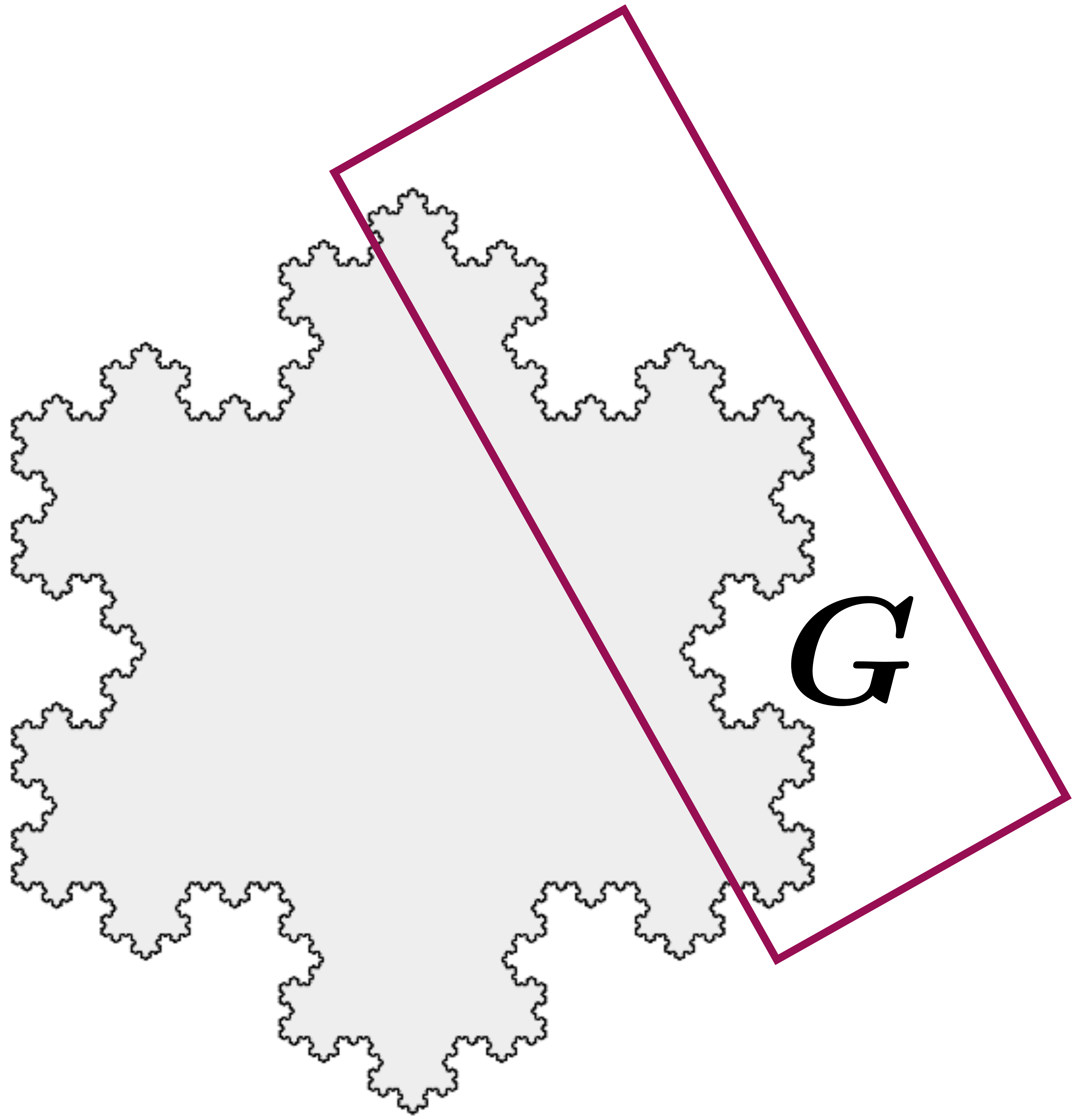
Dimensione del fiocco di Koch

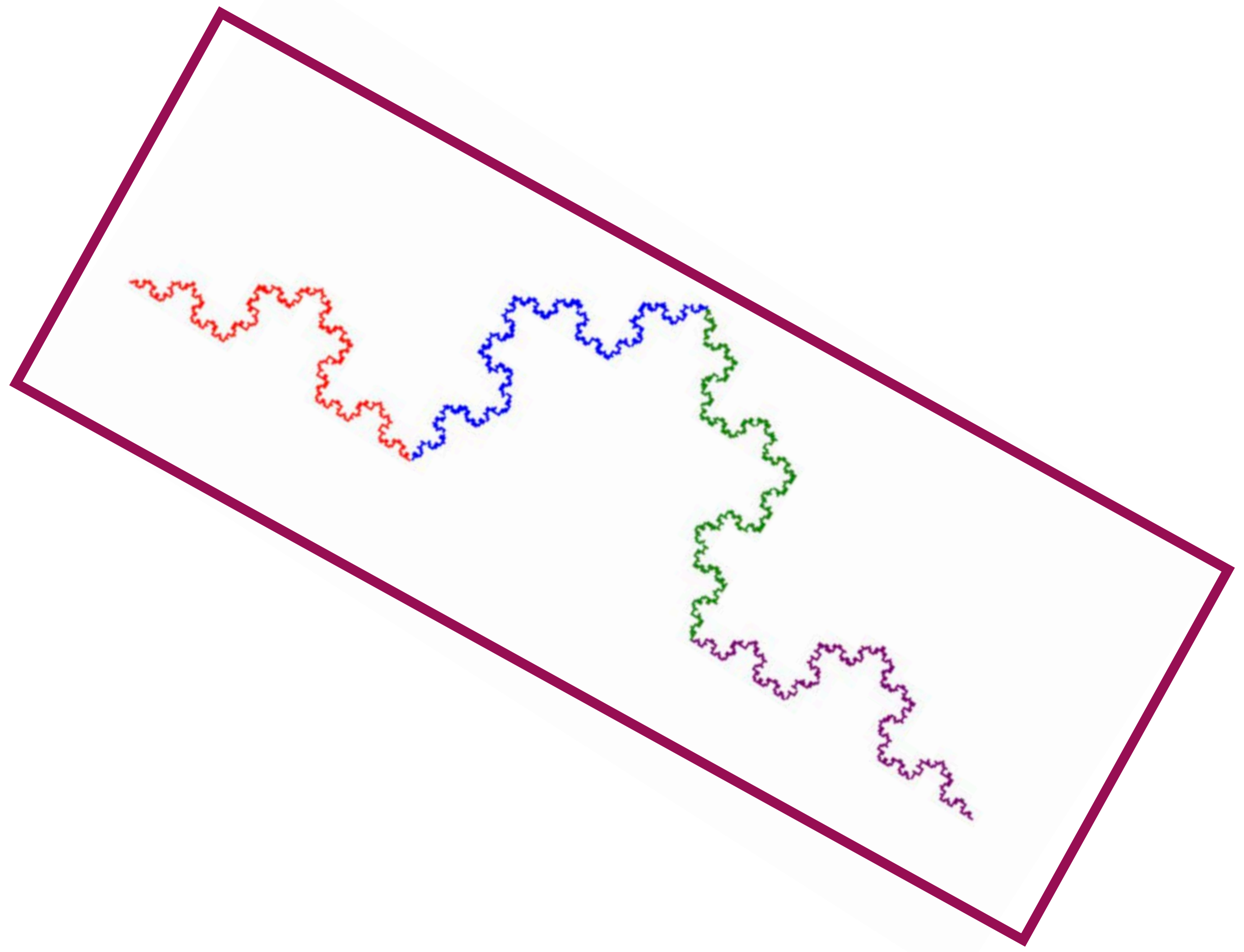


Dimensione del fiocco di Koch

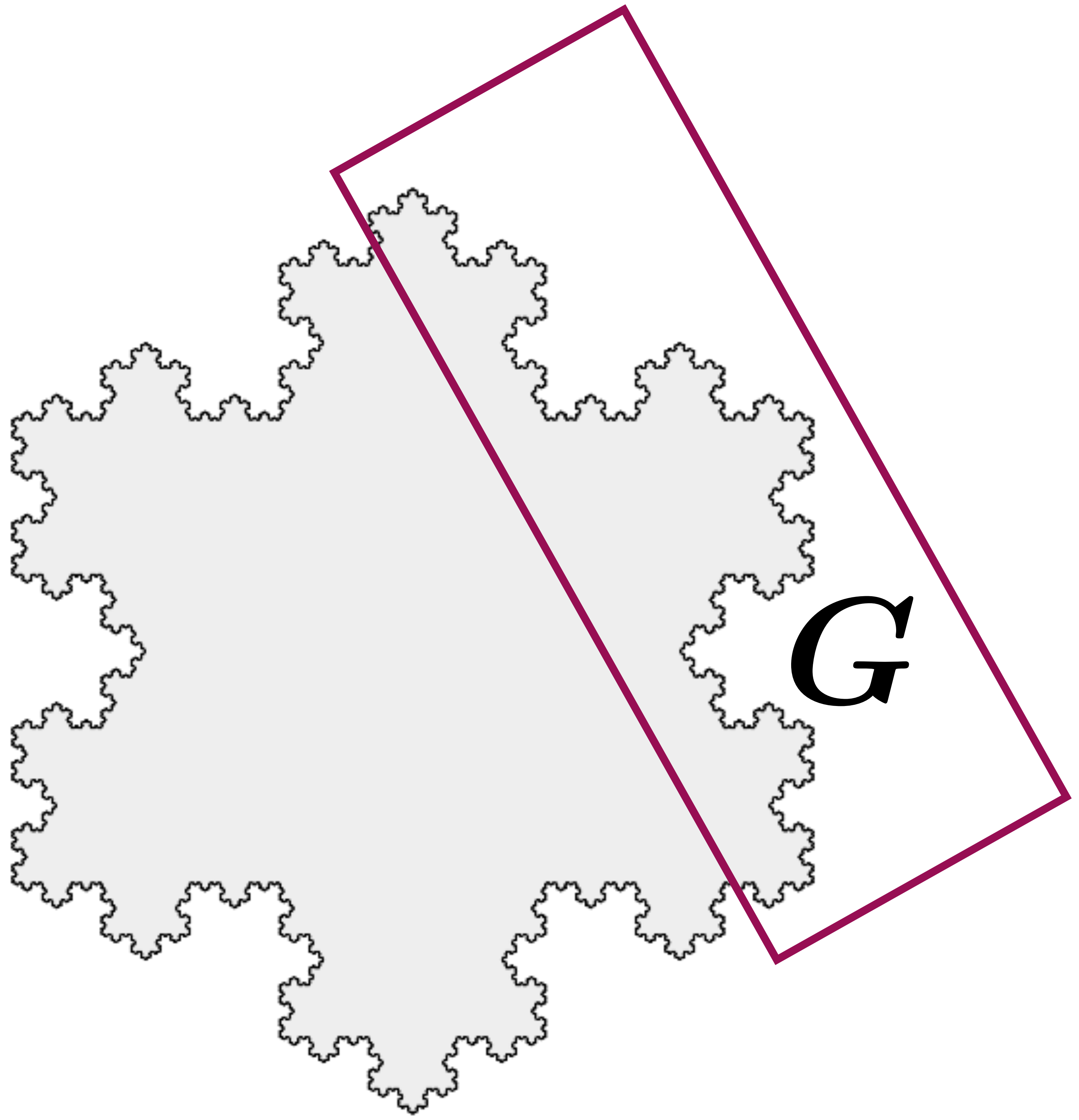


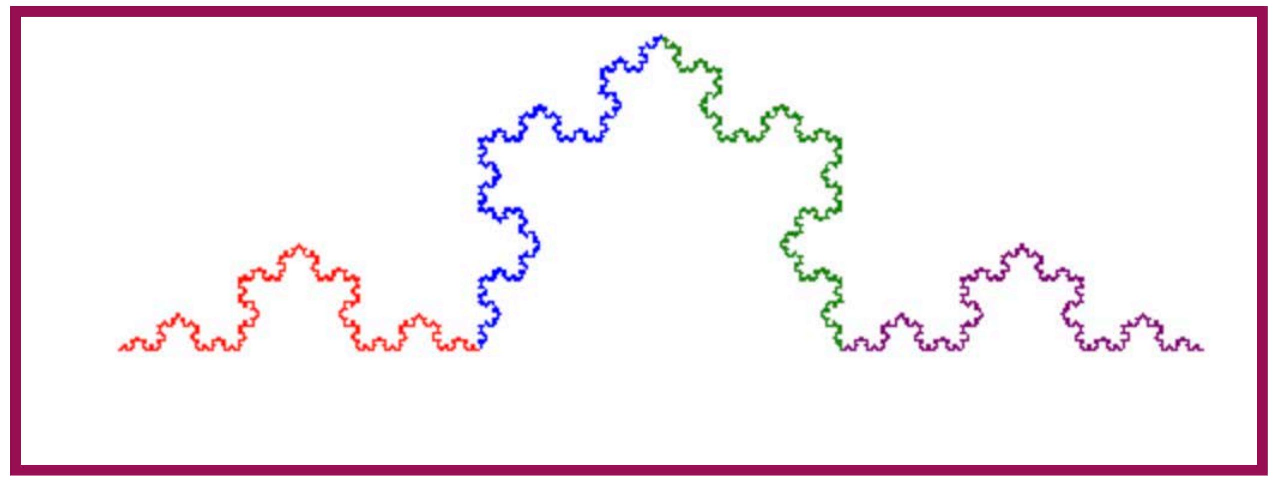
Dimensione del fiocco di Koch



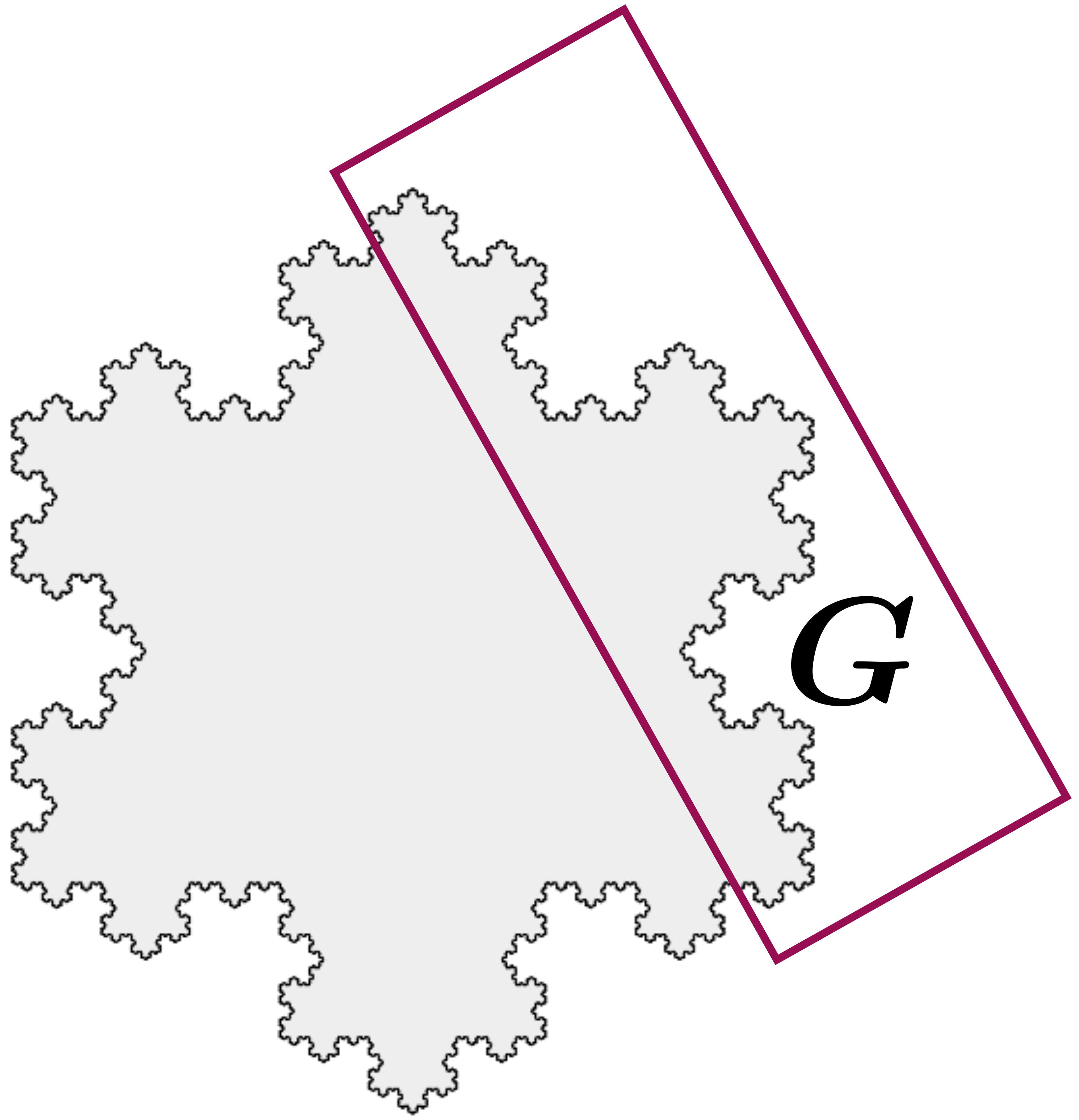


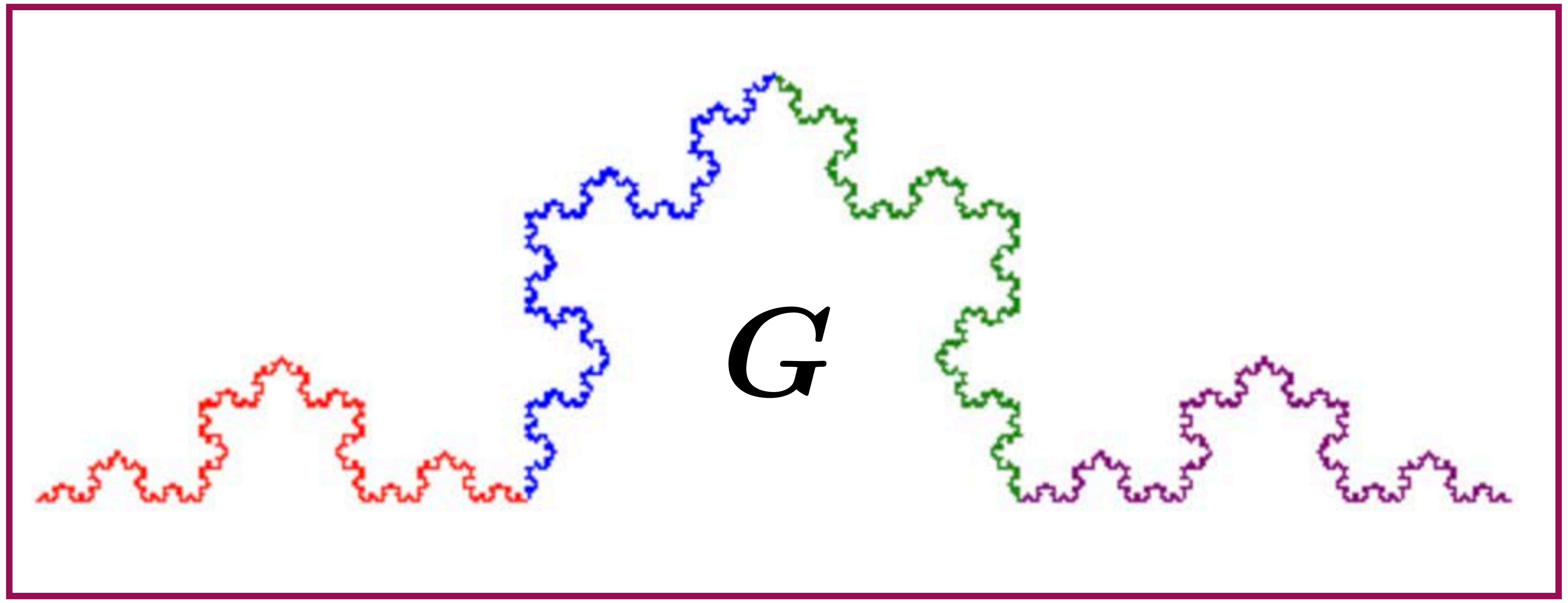
Dimensione del fiocco di Koch



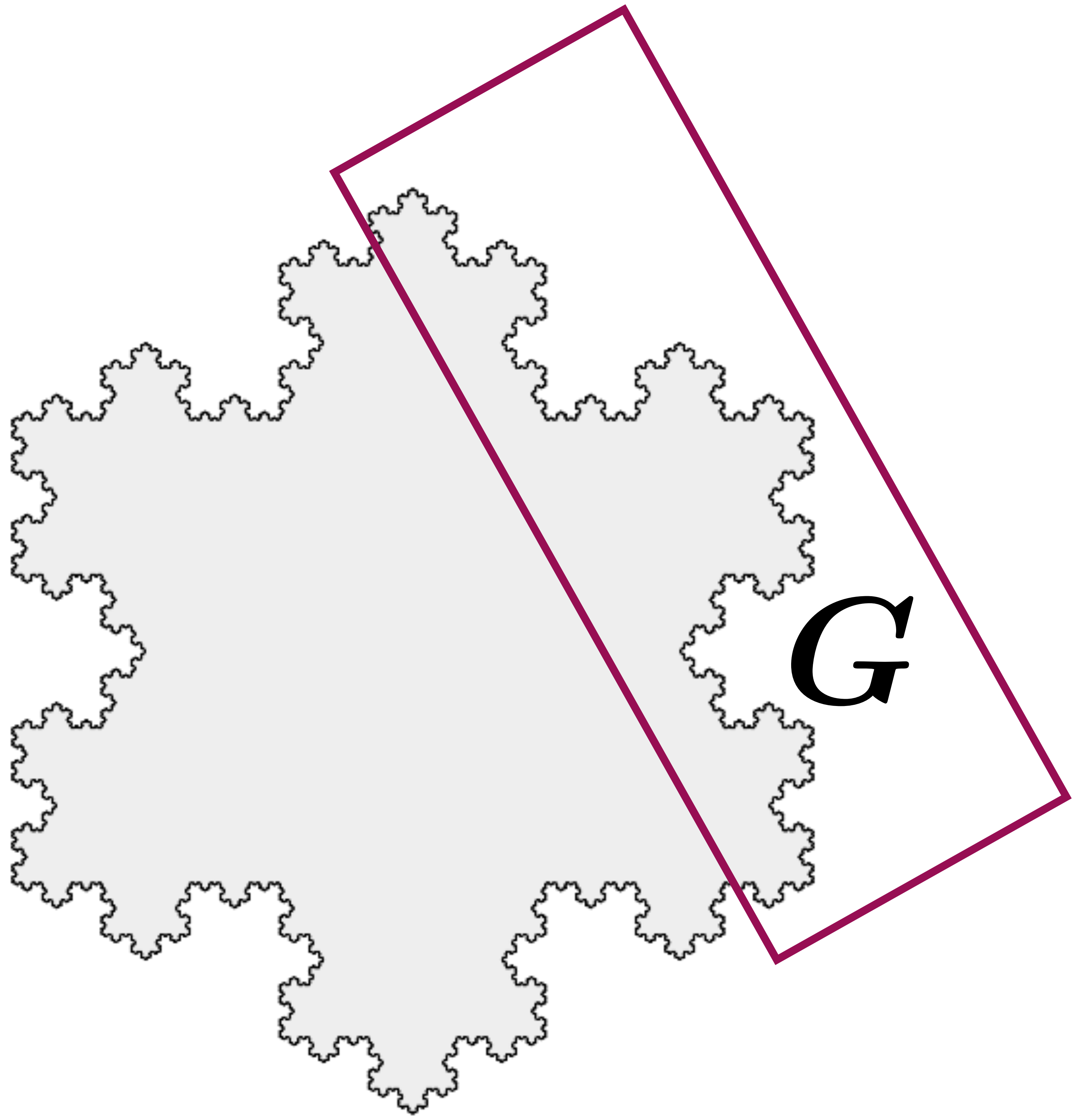


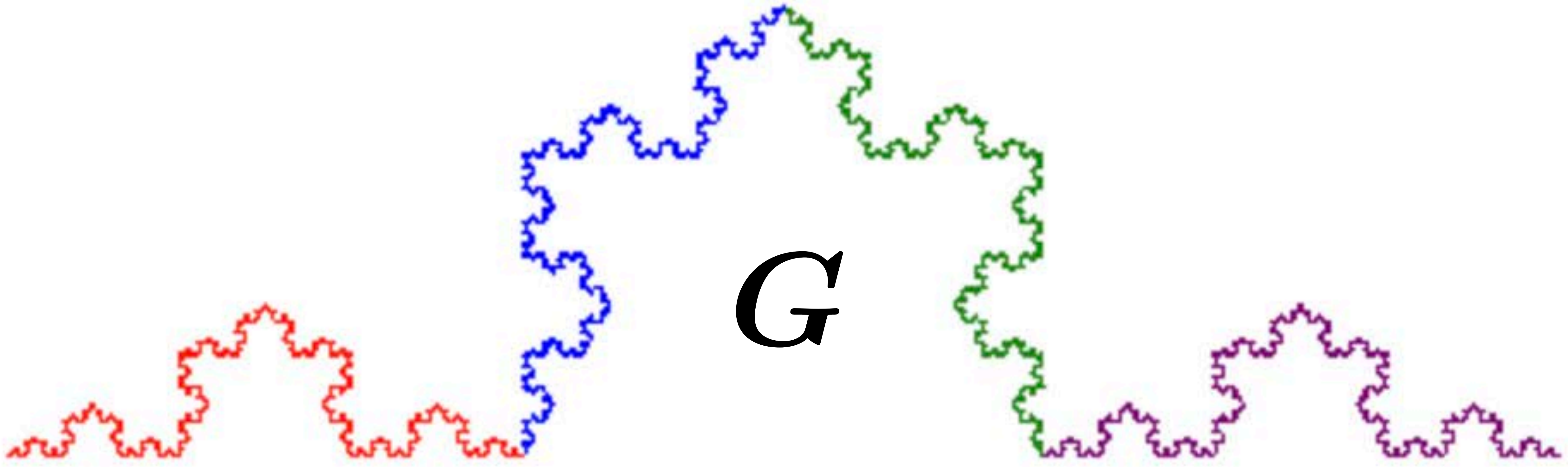
Dimensione del fiocco di Koch



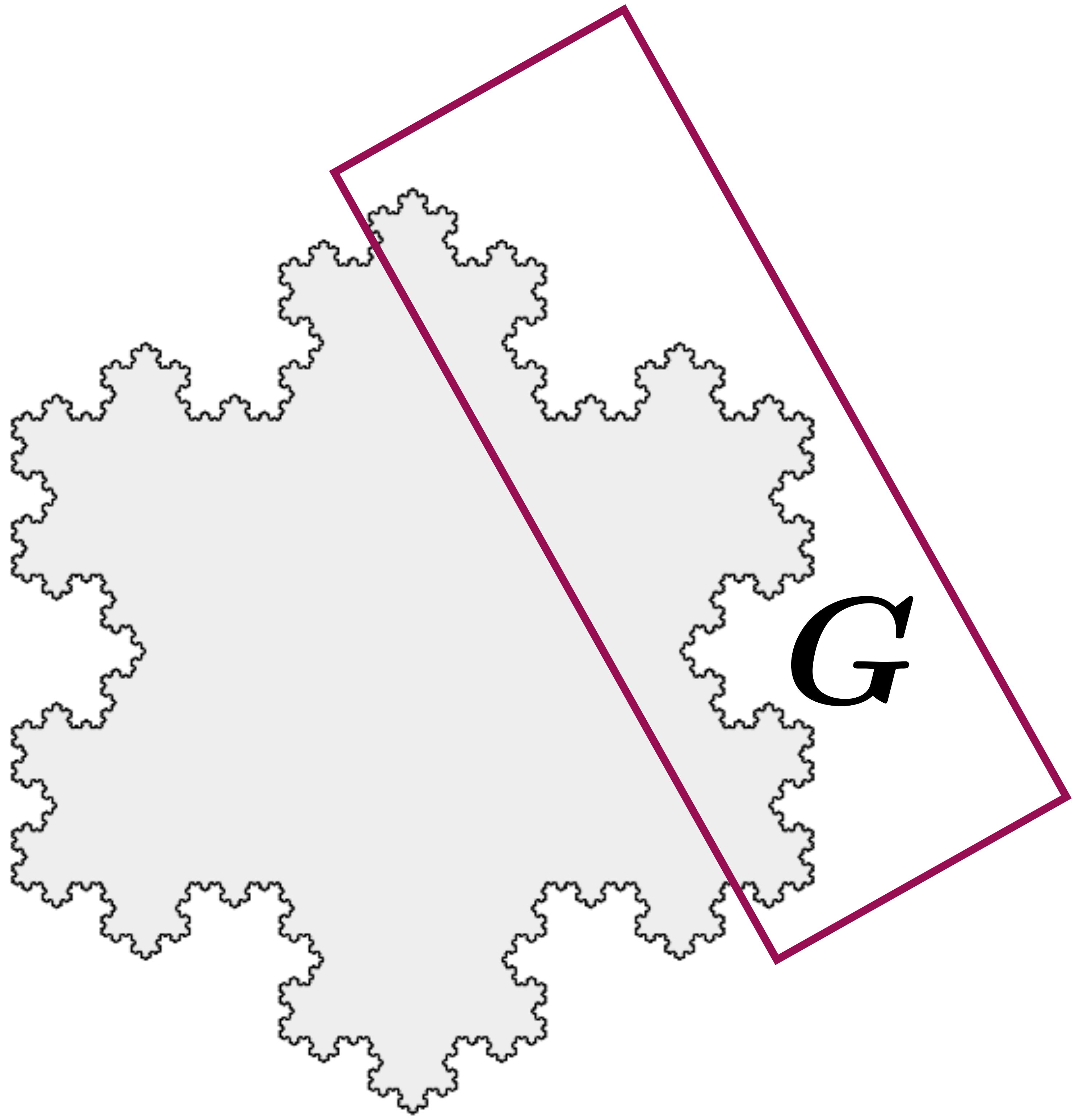


Dimensione del fiocco di Koch

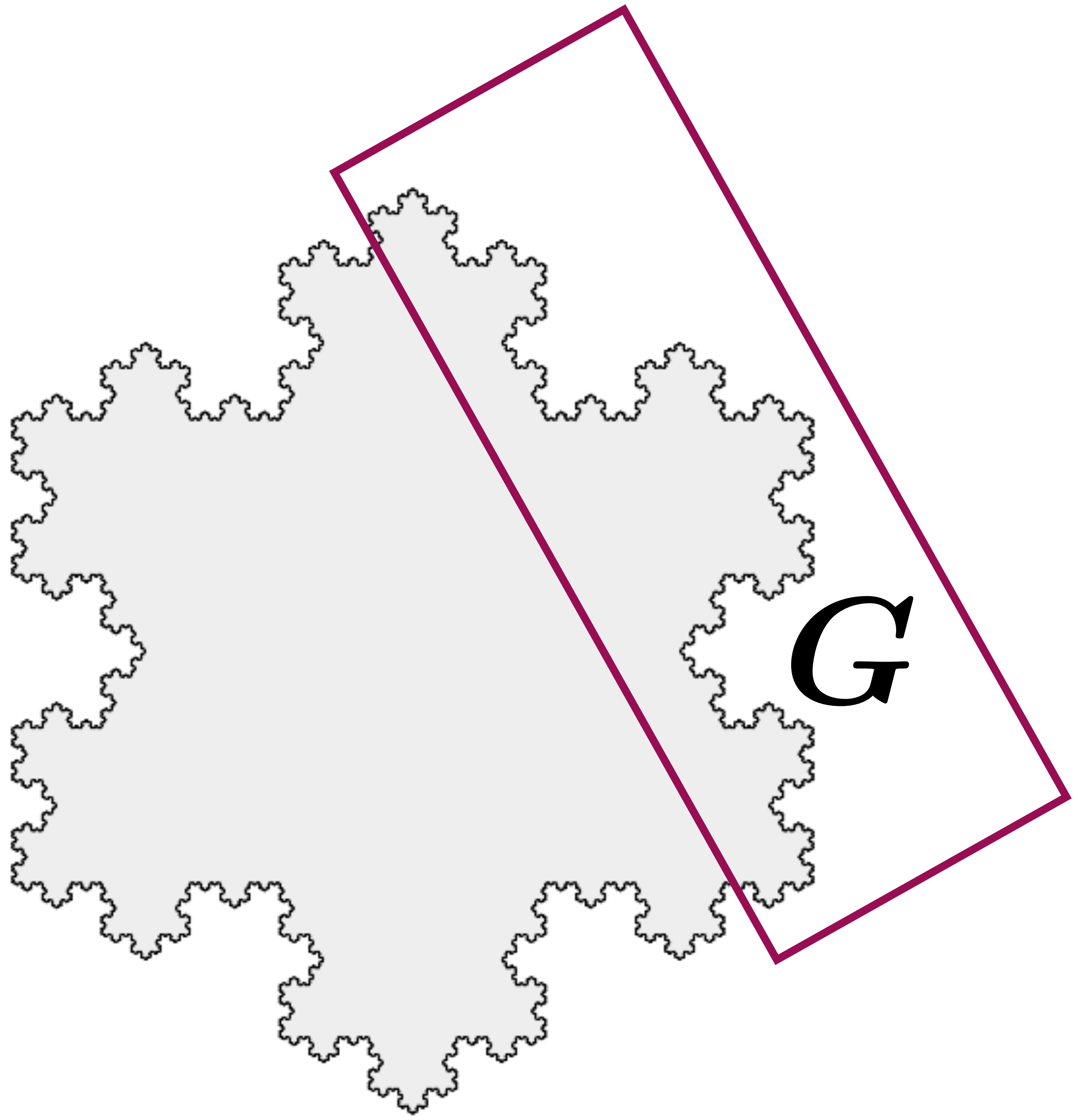


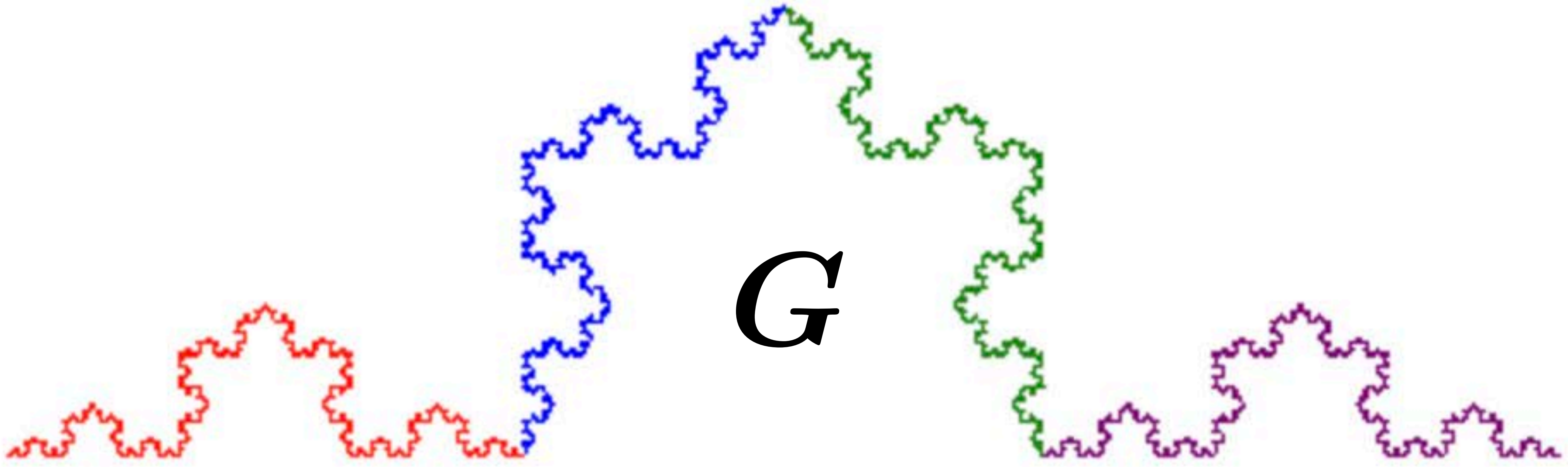


Dimensione del fiocco di Koch

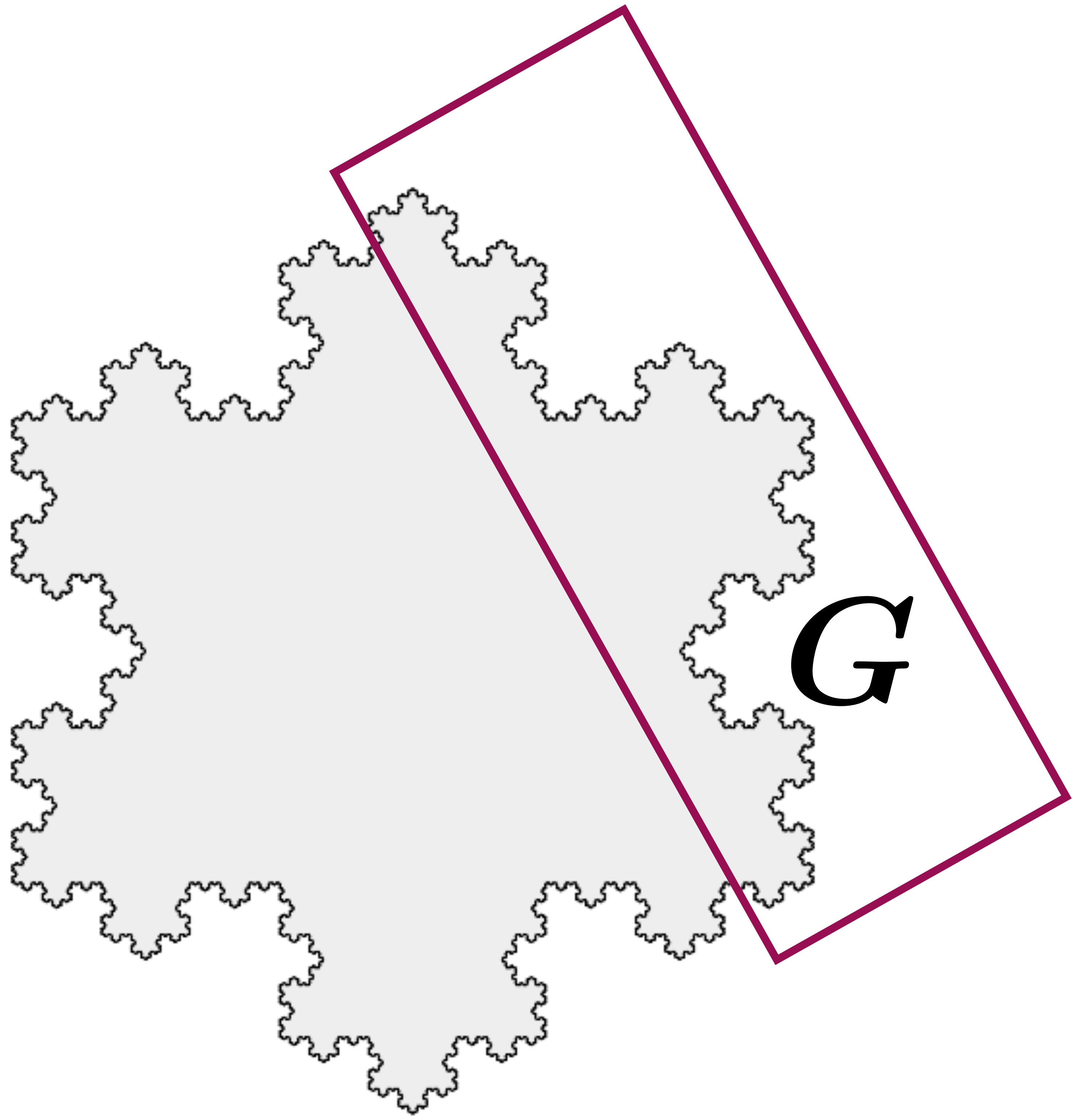


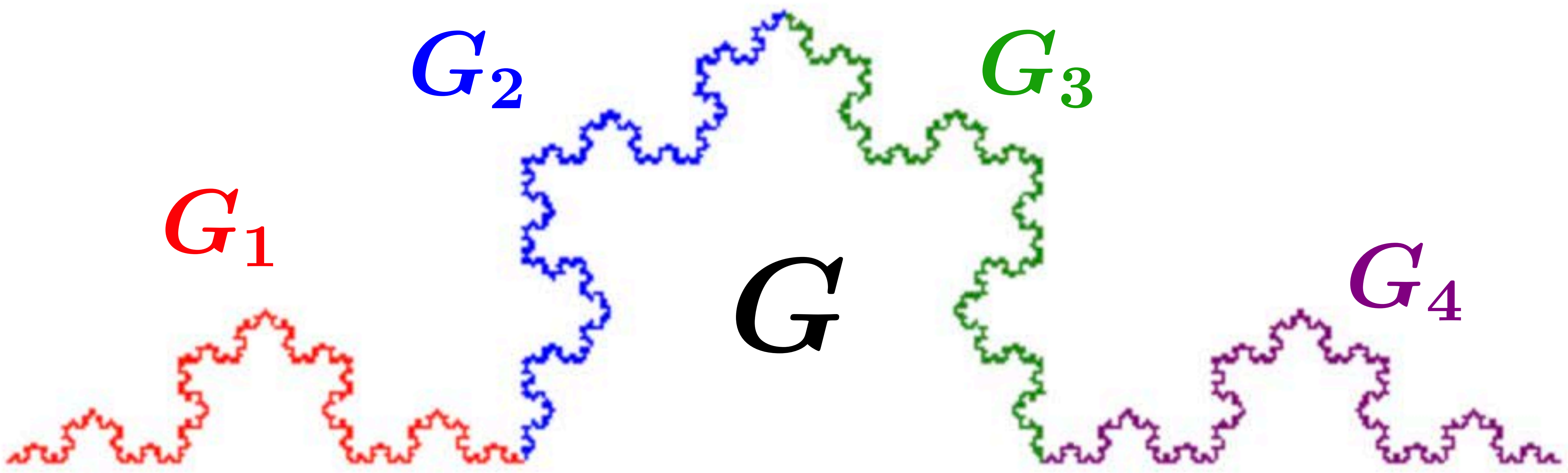
Dimensione del fiocco di Koch



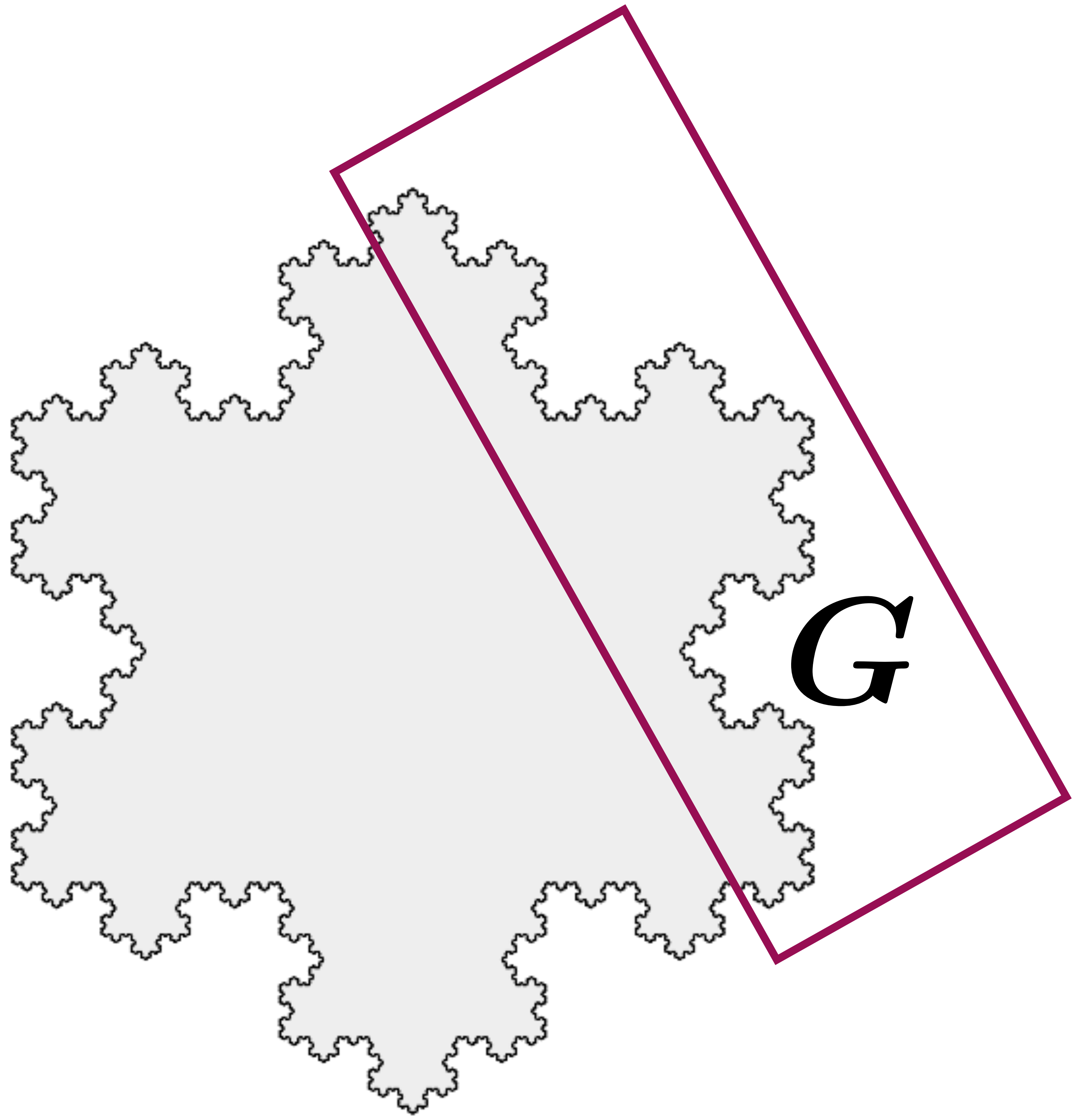


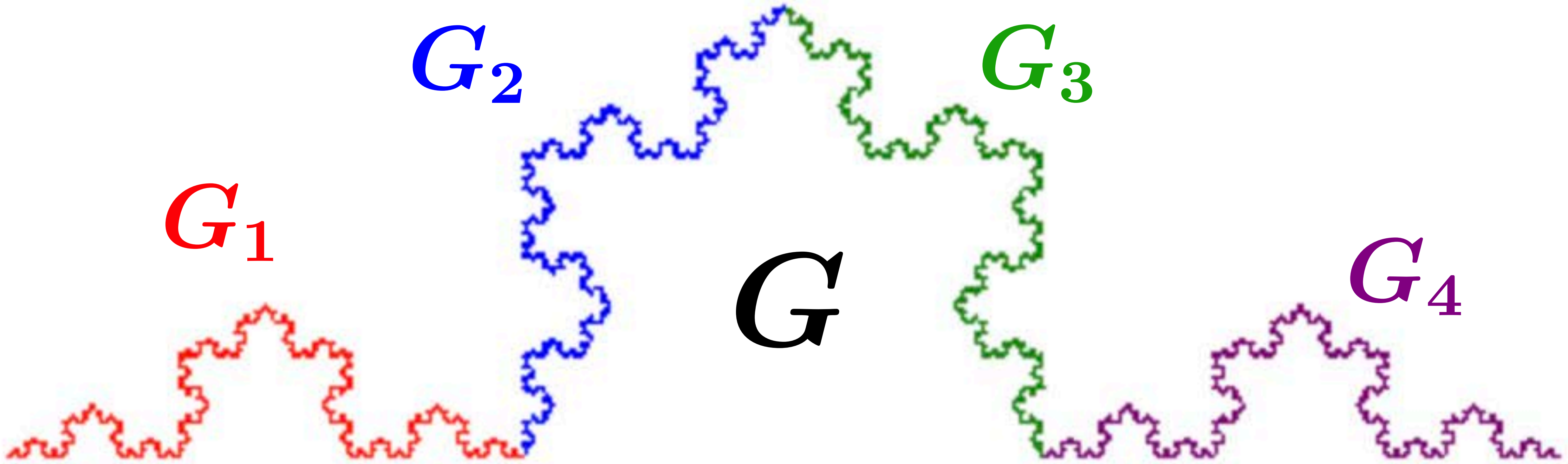
Dimensione del fiocco di Koch





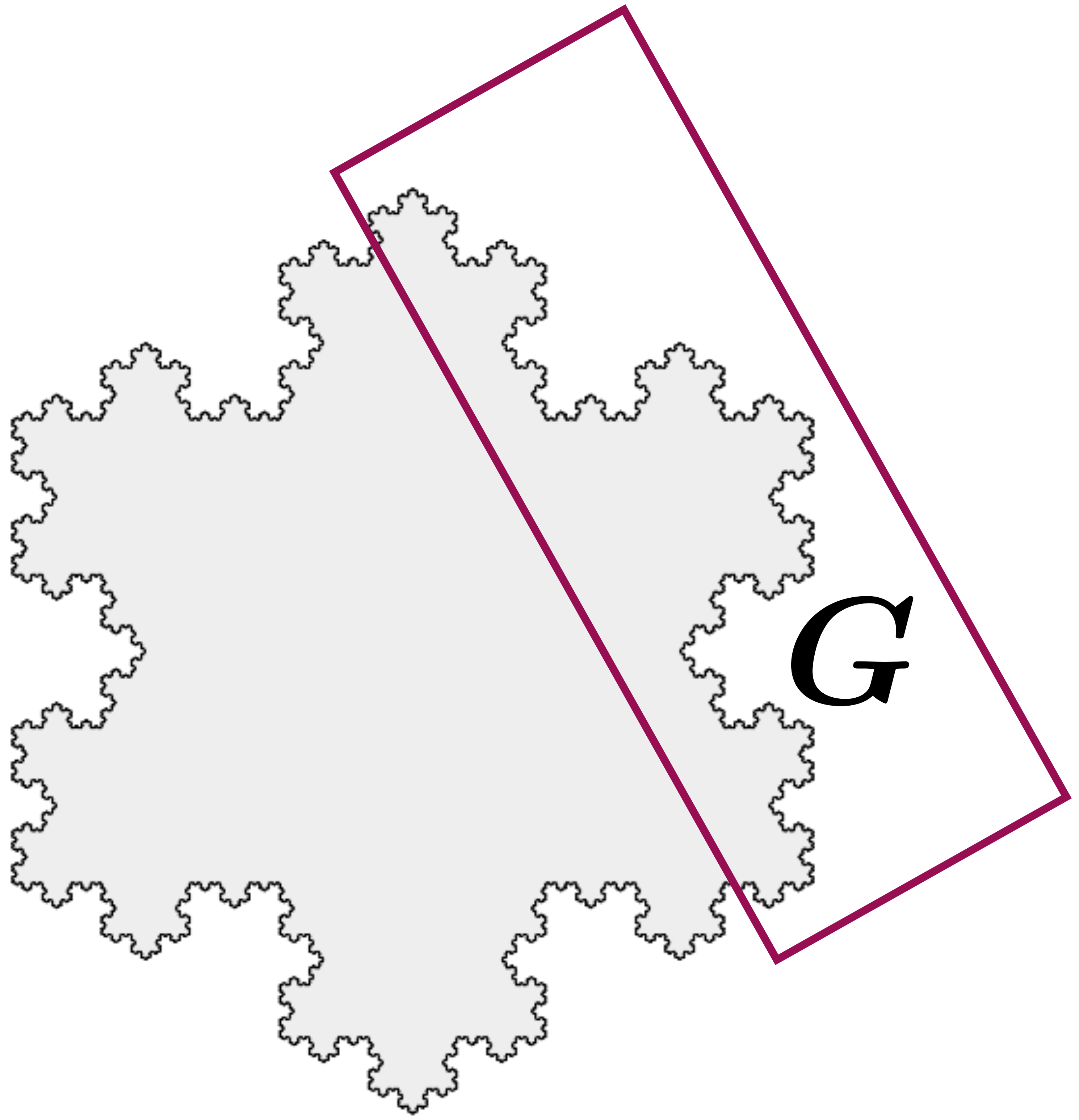
Dimensione del fiocco di Koch

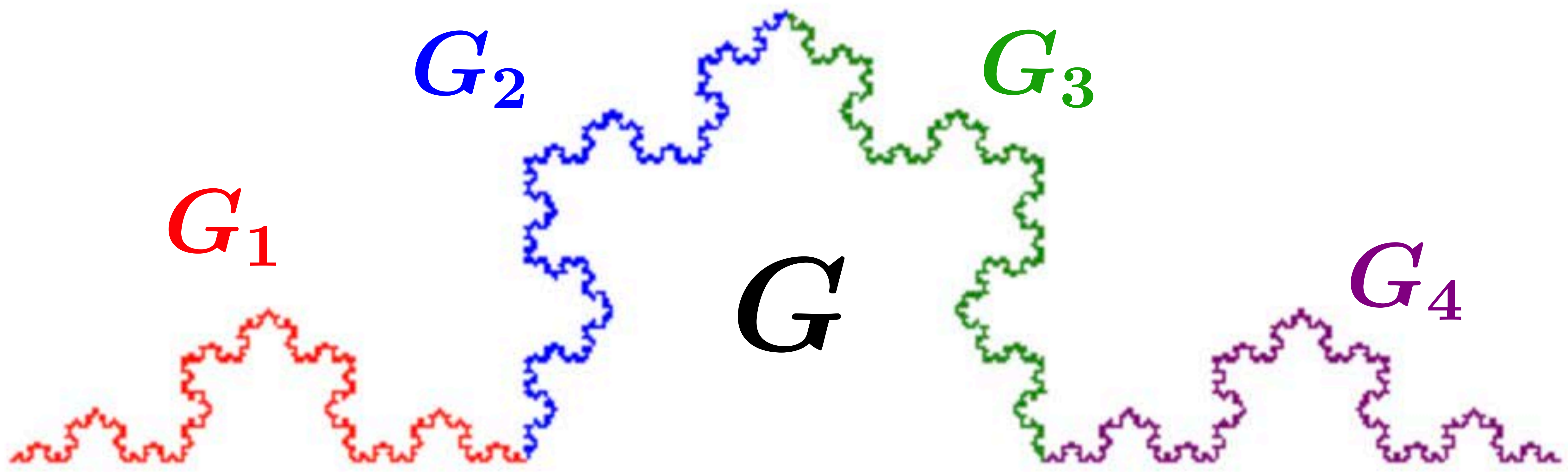




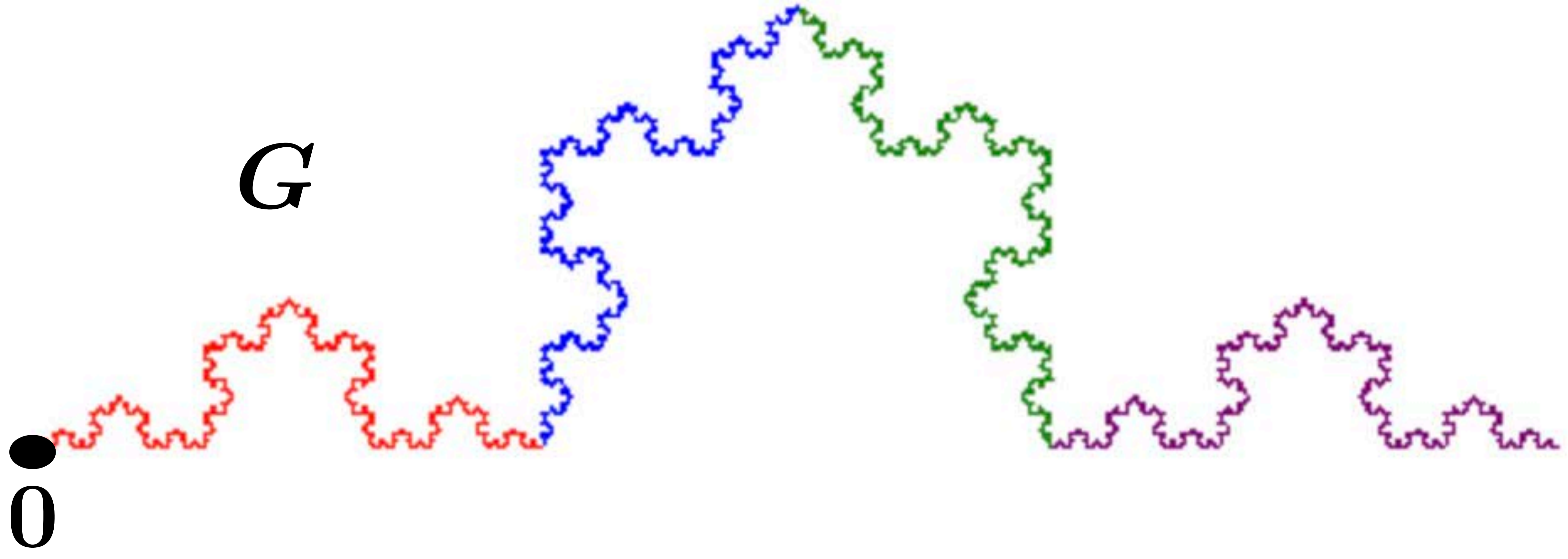
$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$

Dimensione del fiocco di Koch

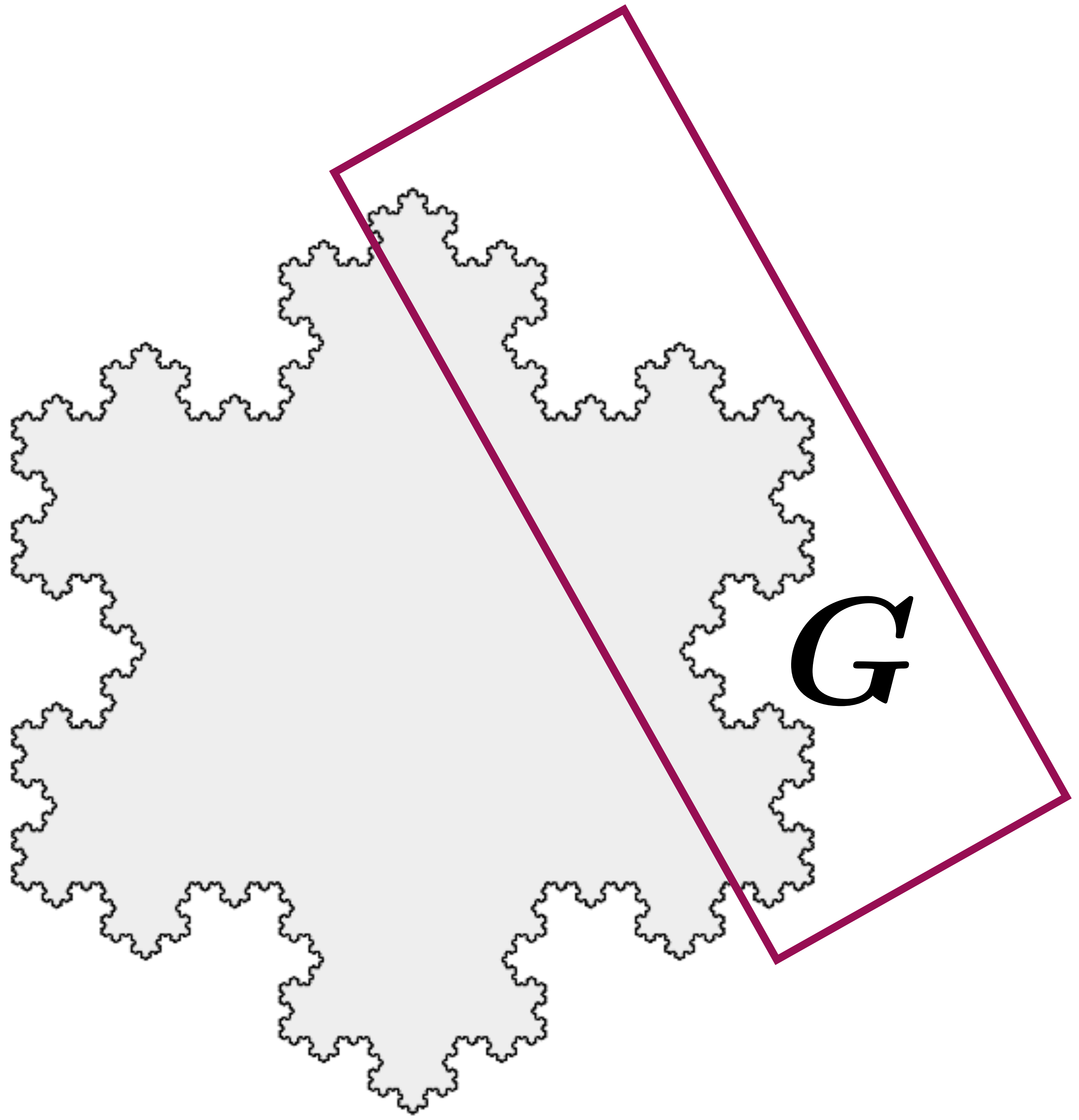


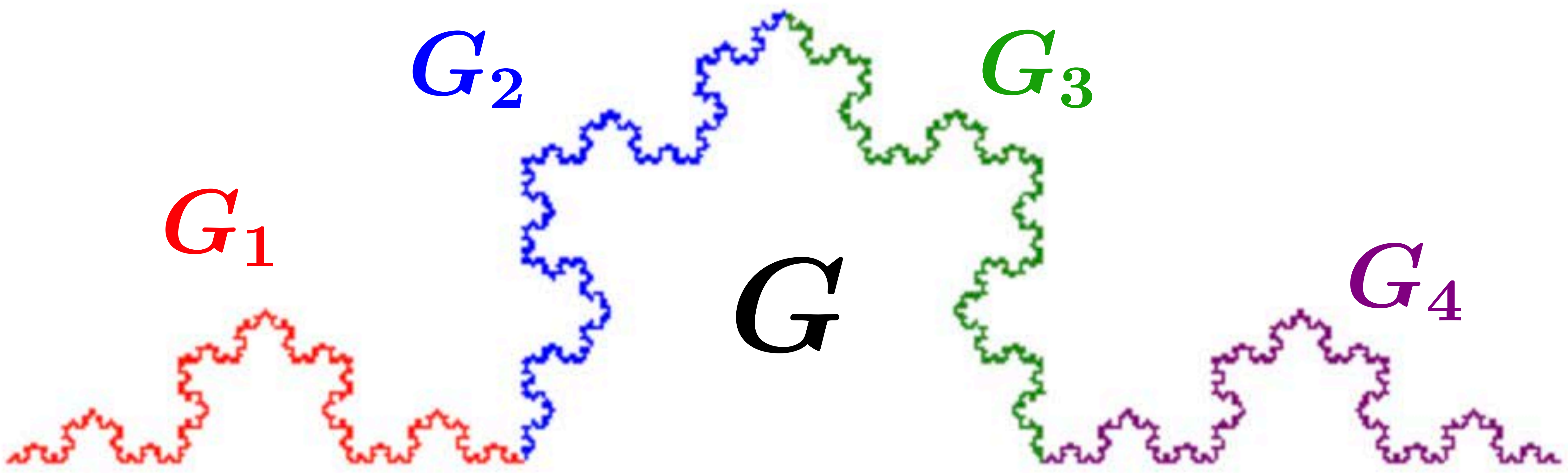


$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$

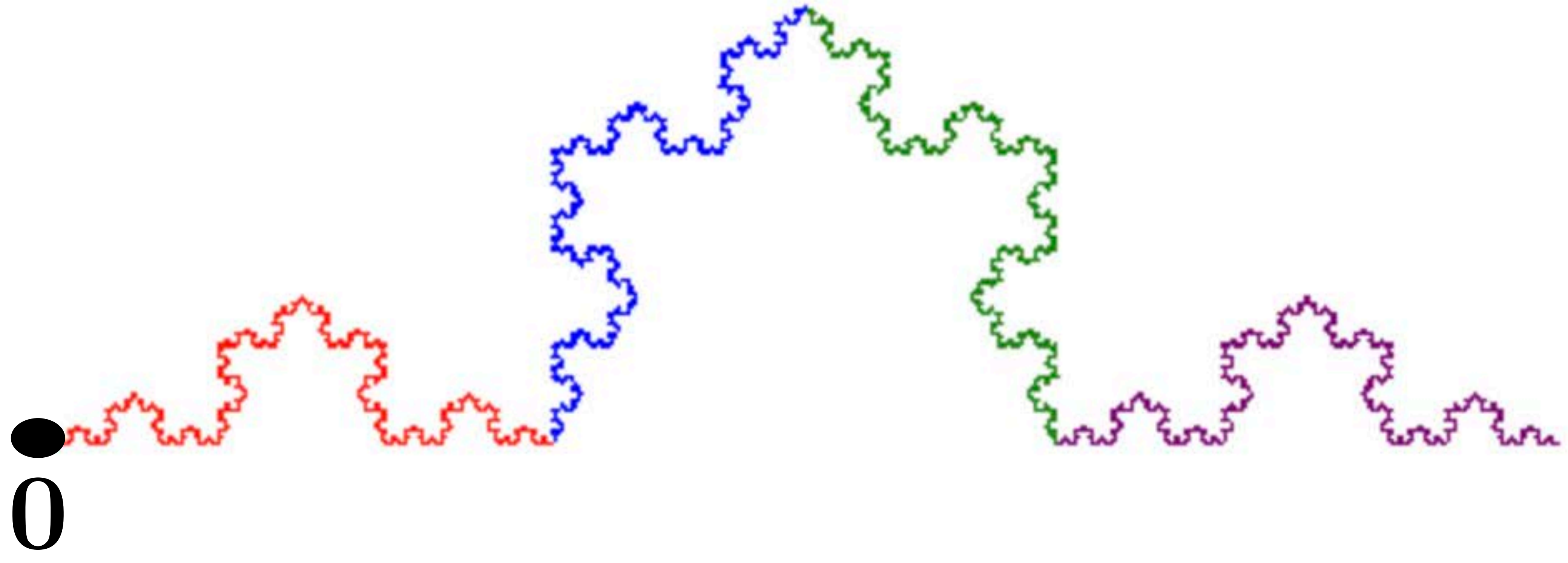


Dimensione del fiocco di Koch

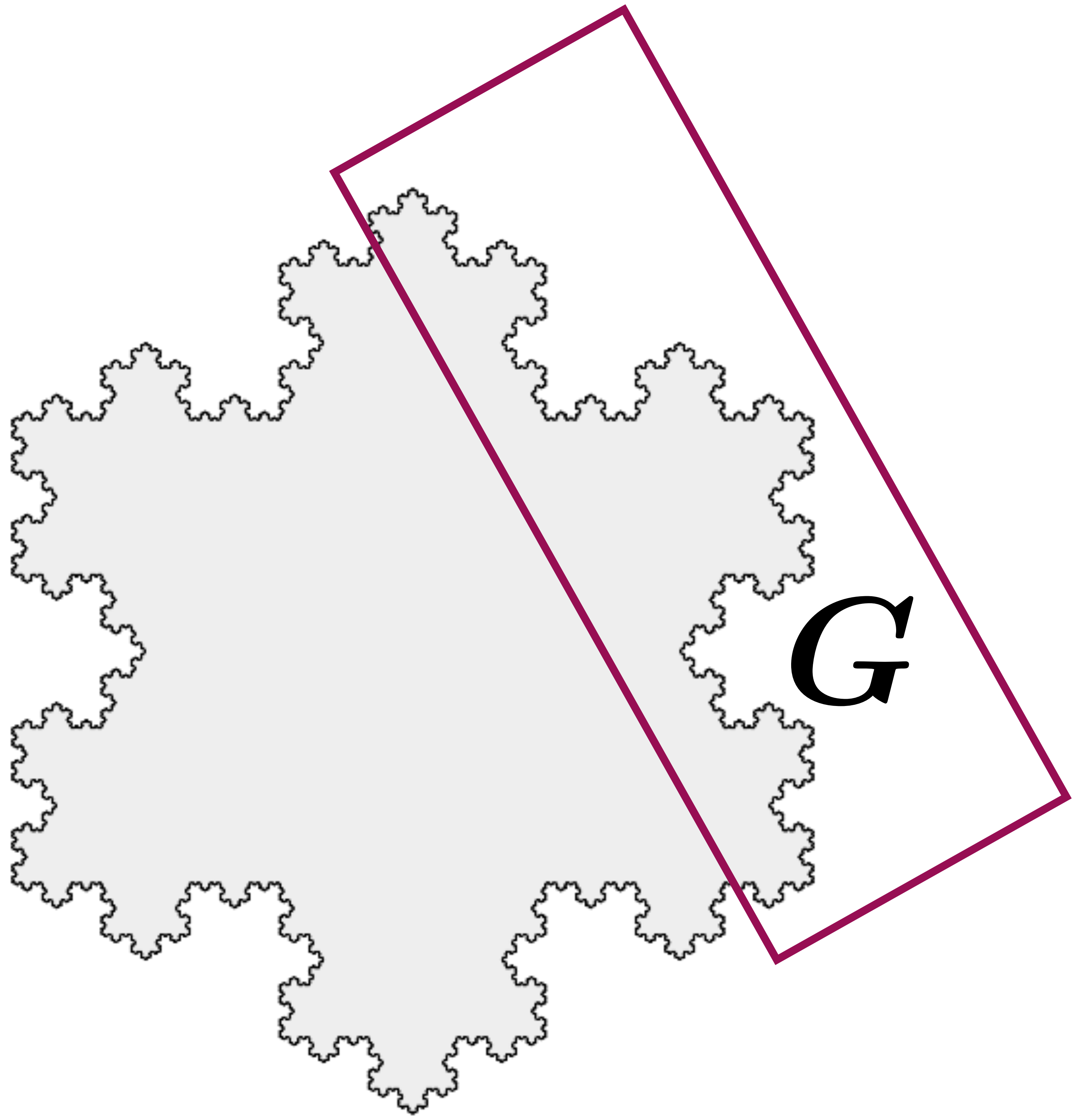


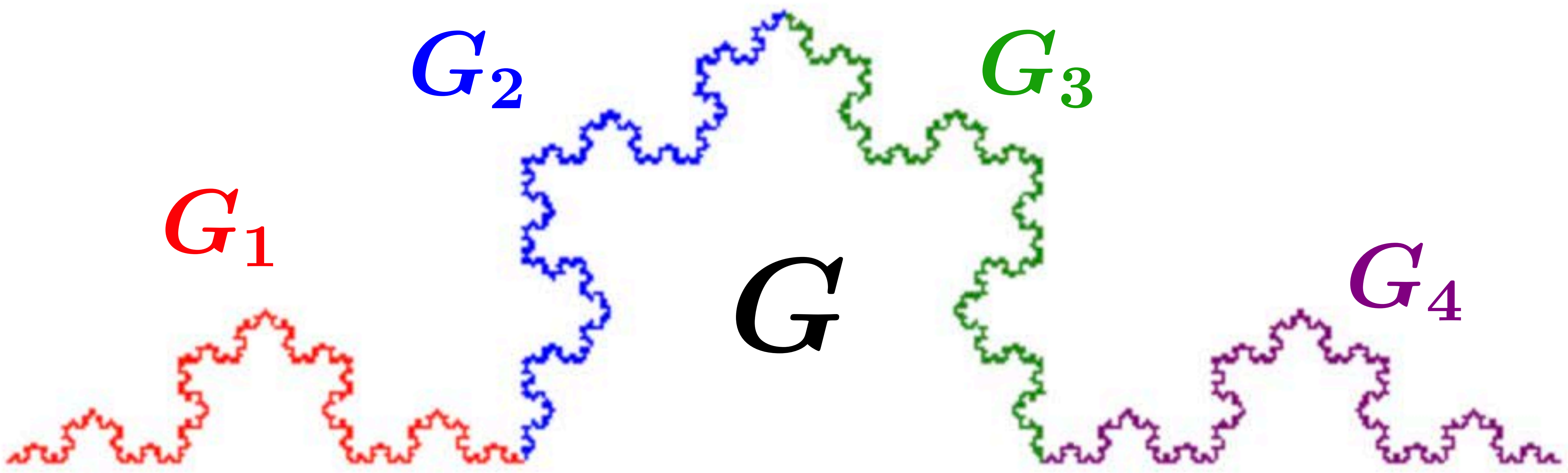


$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$

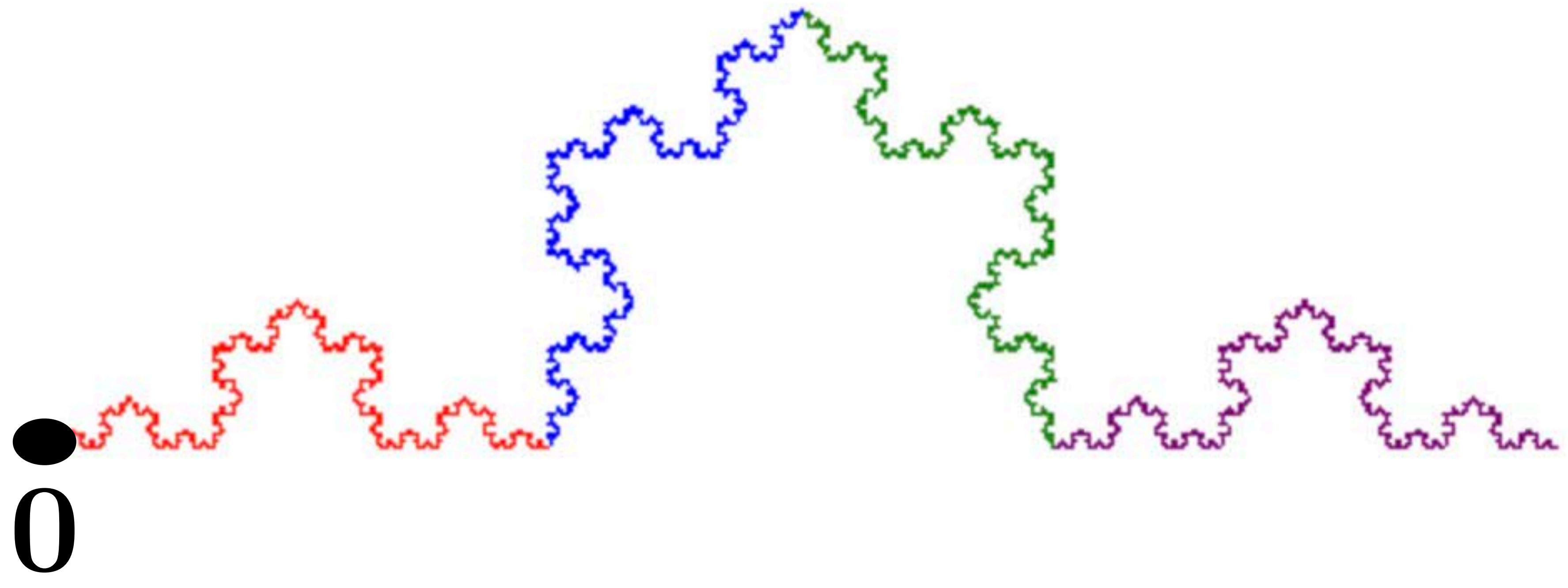


Dimensione del fiocco di Koch

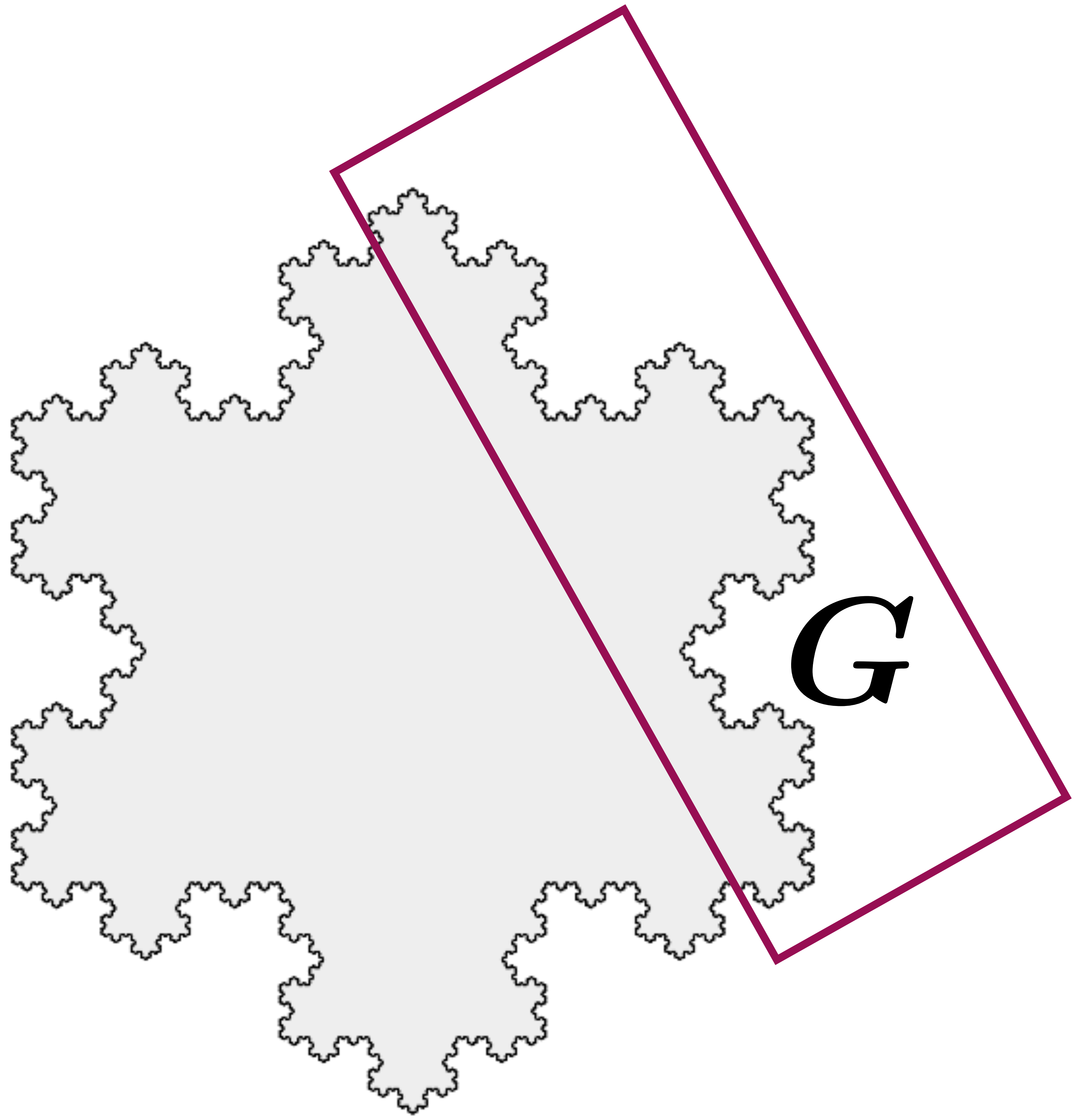


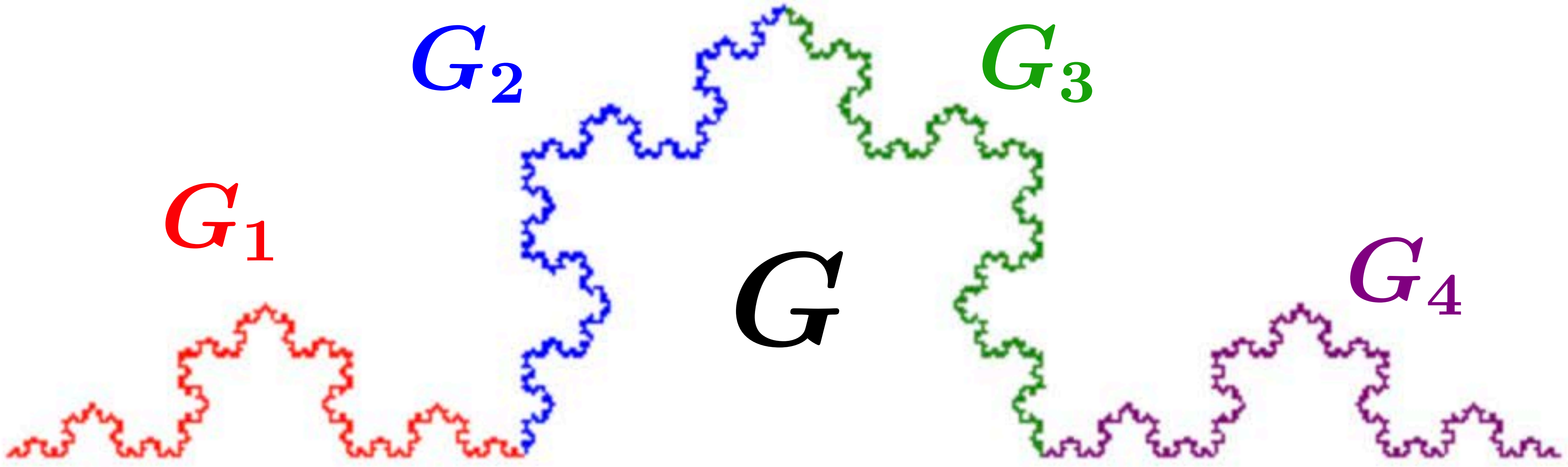


$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$

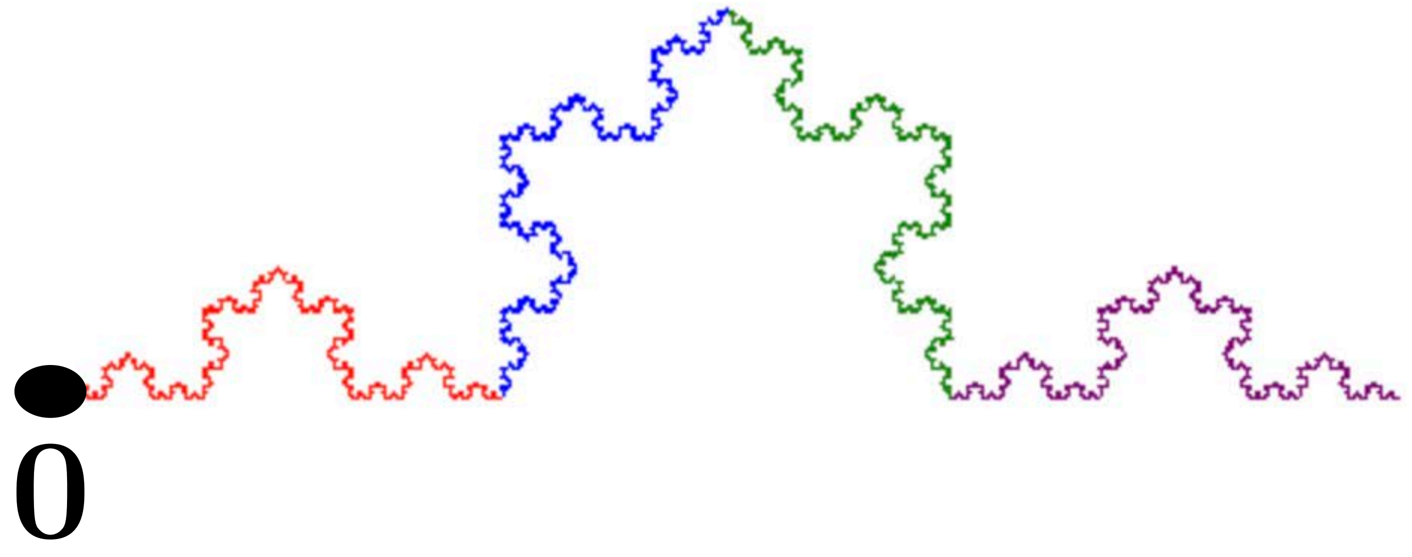


Dimensione del fiocco di Koch

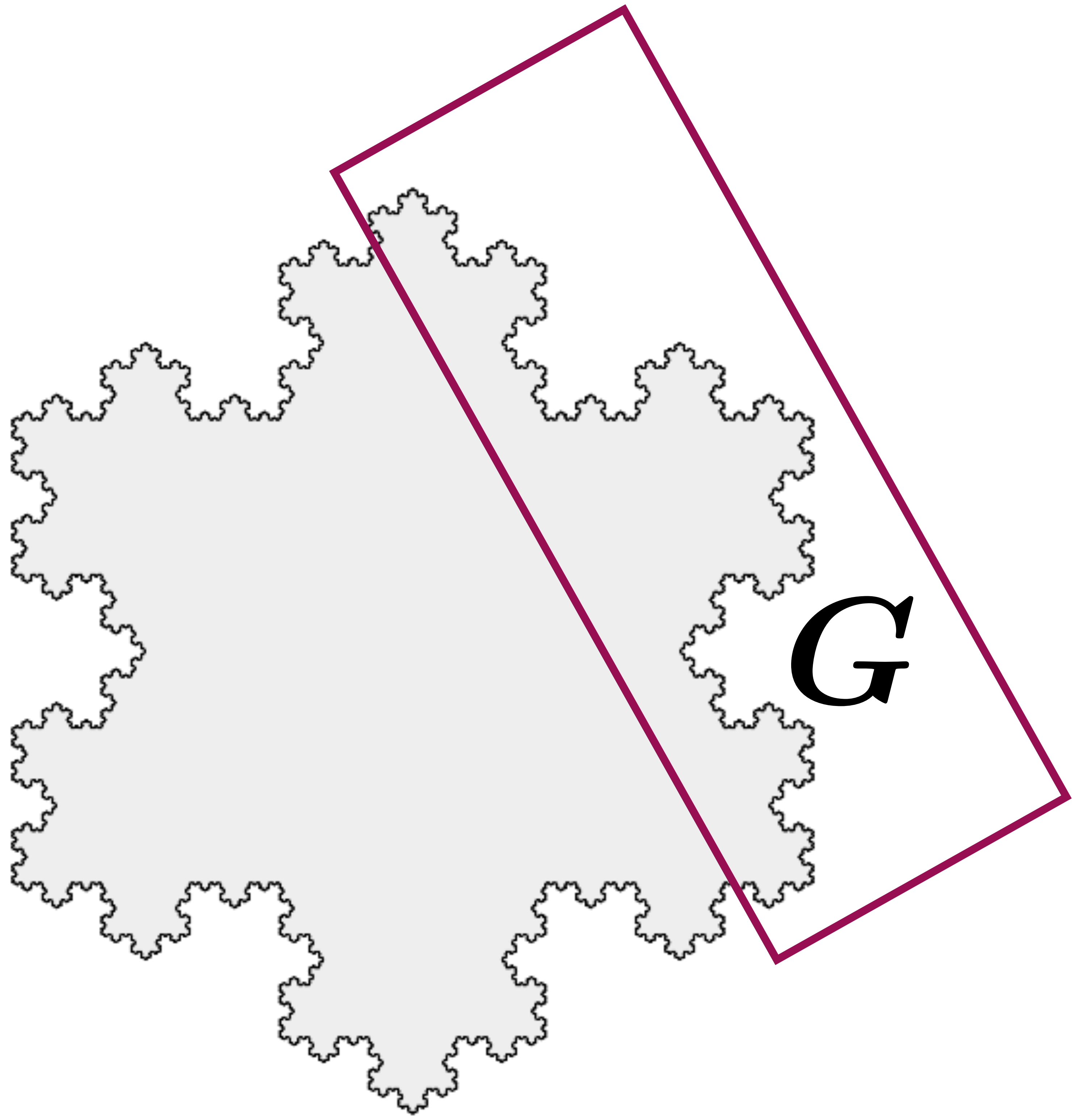


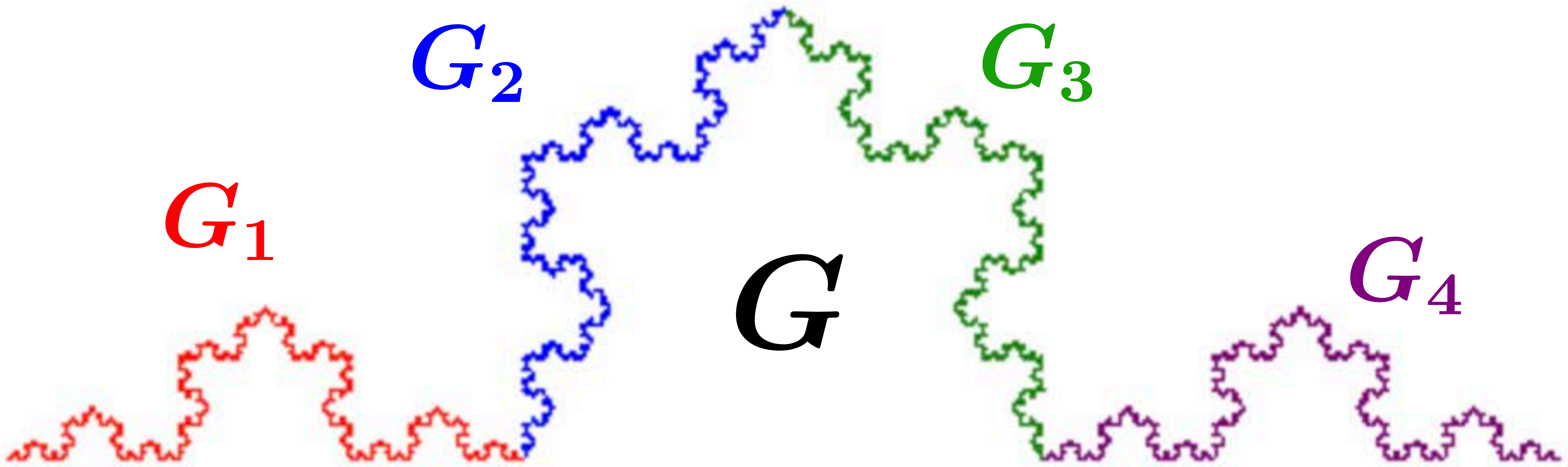


$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$

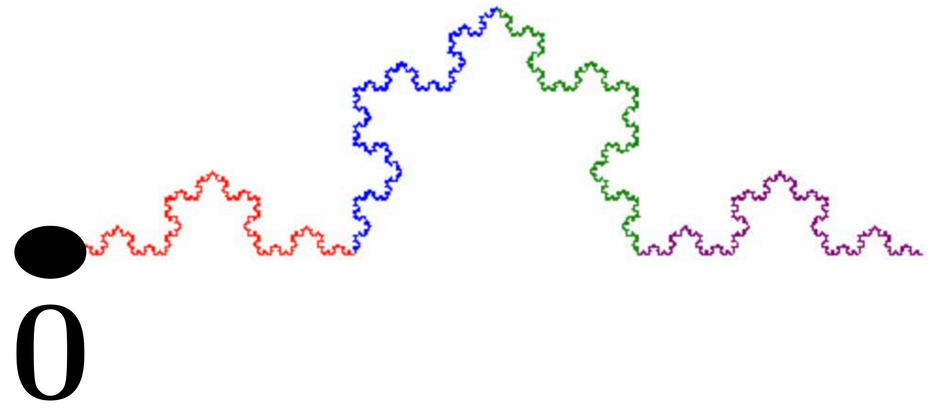


Dimensione del fiocco di Koch

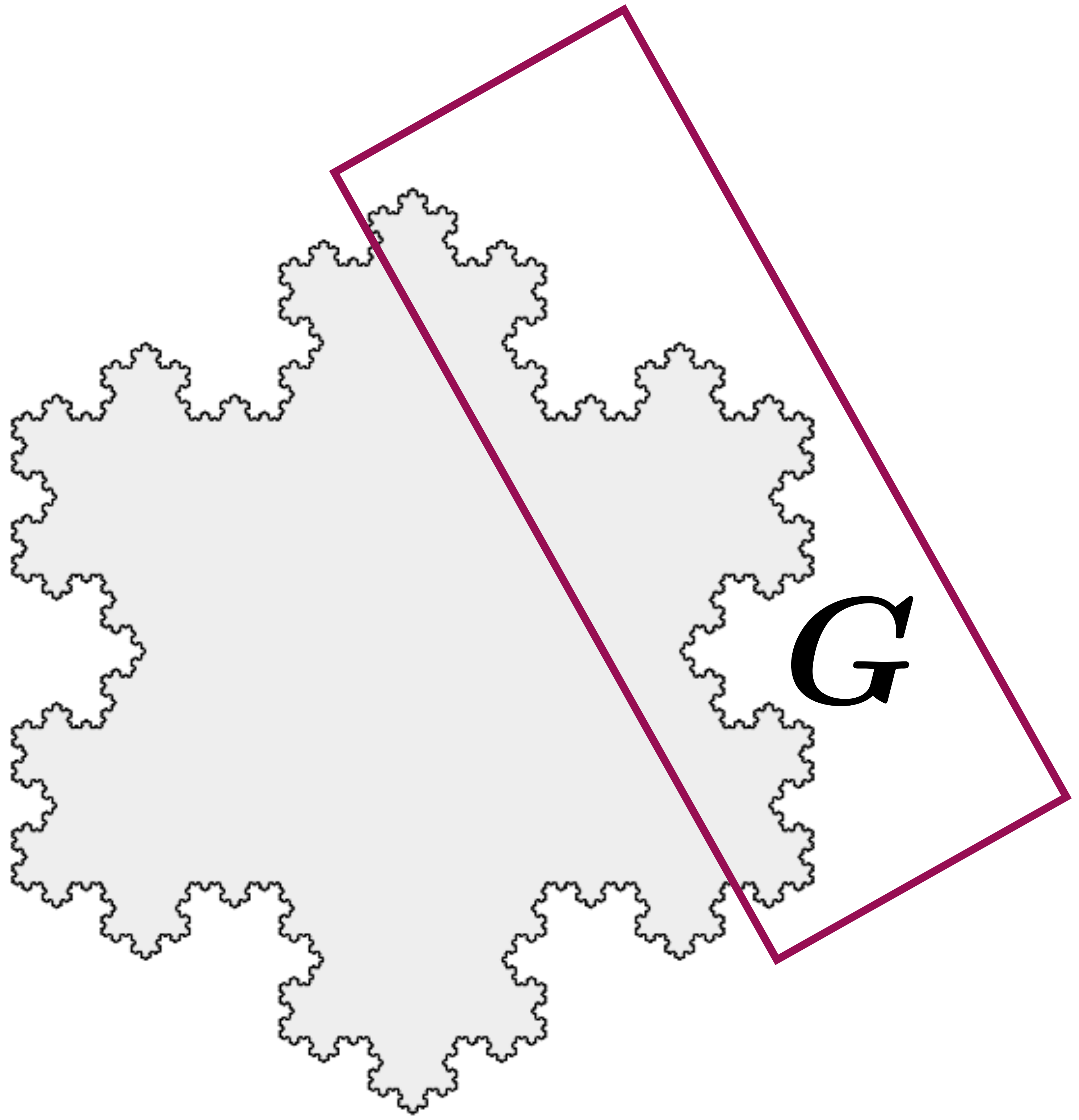


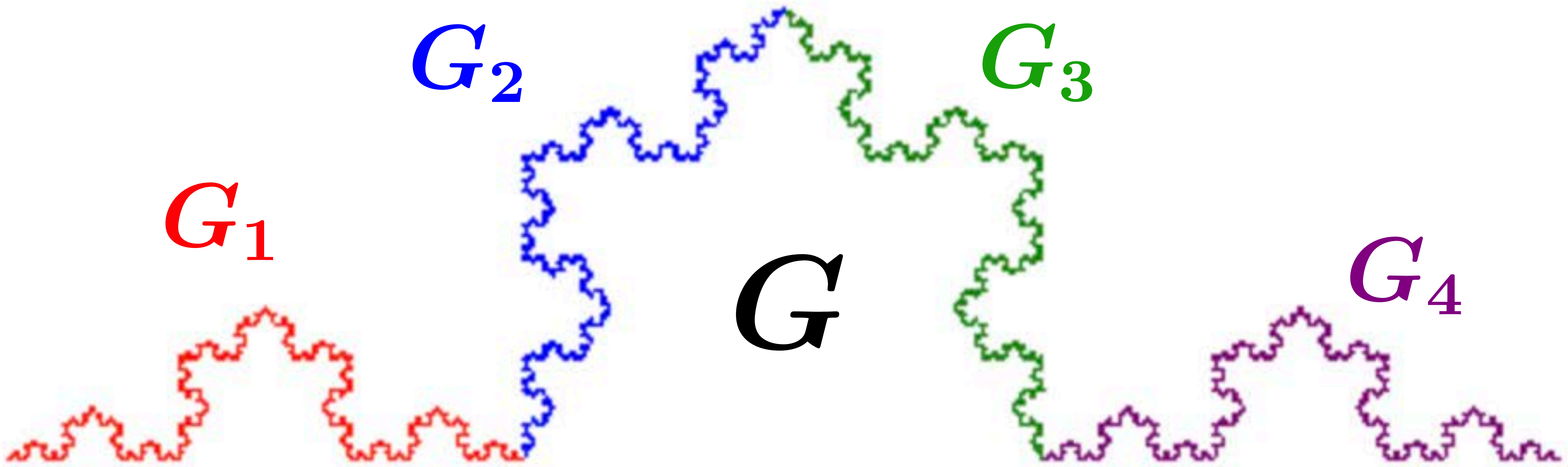


$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$



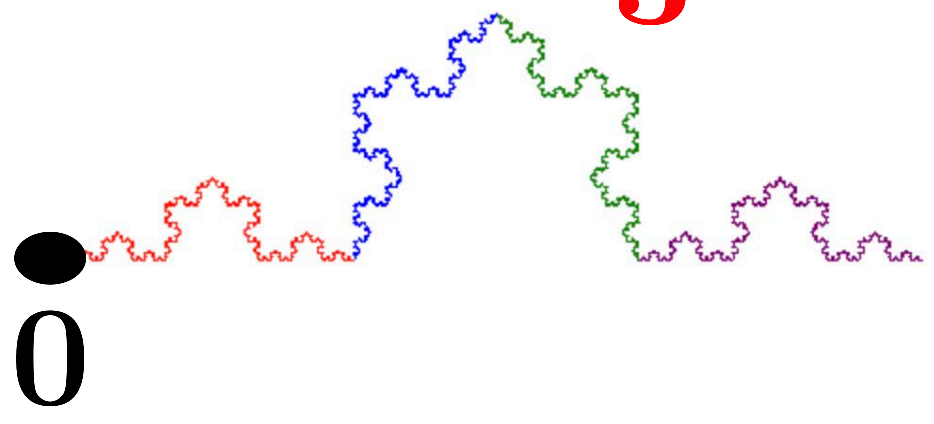
Dimensione del fiocco di Koch



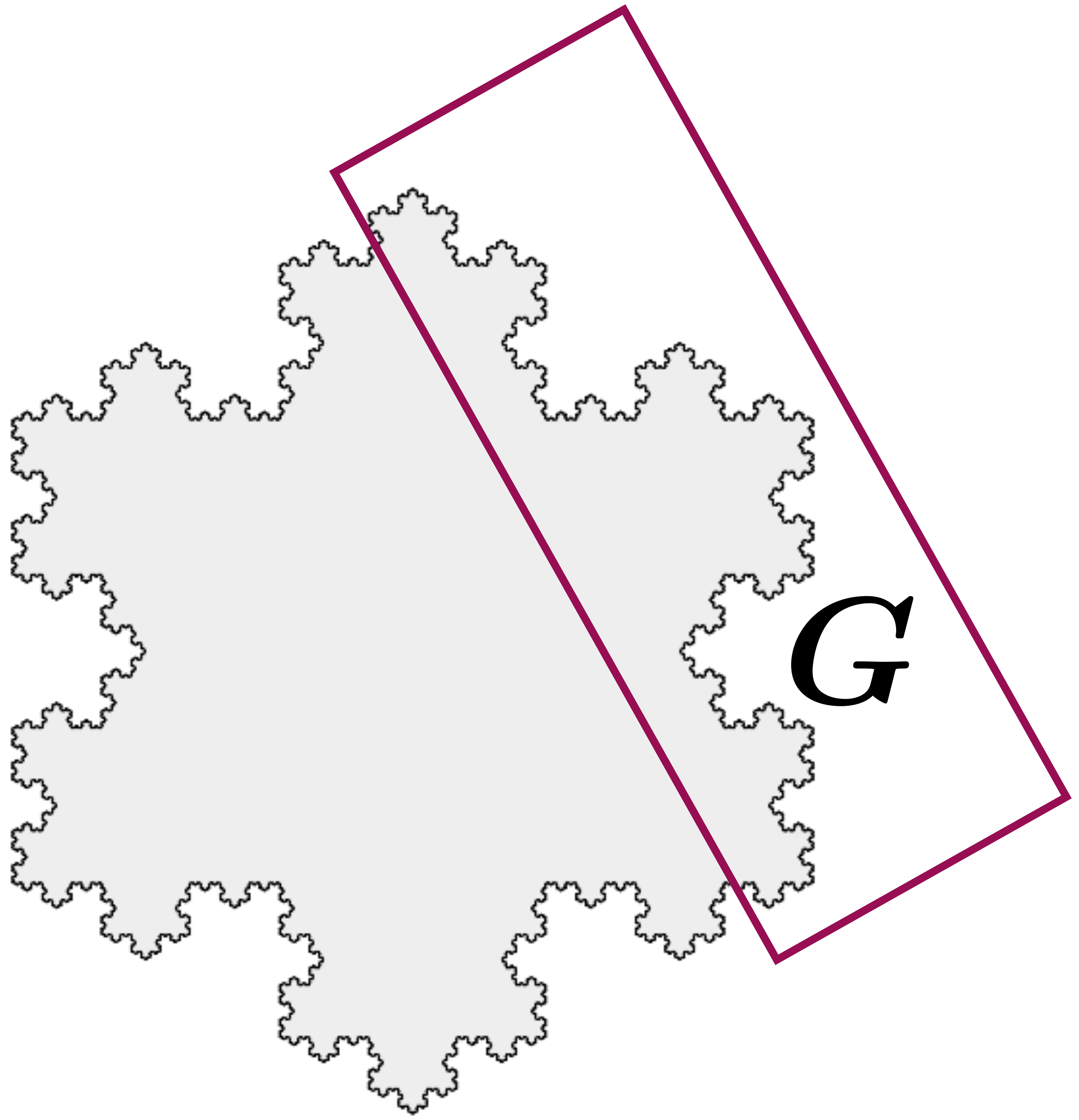


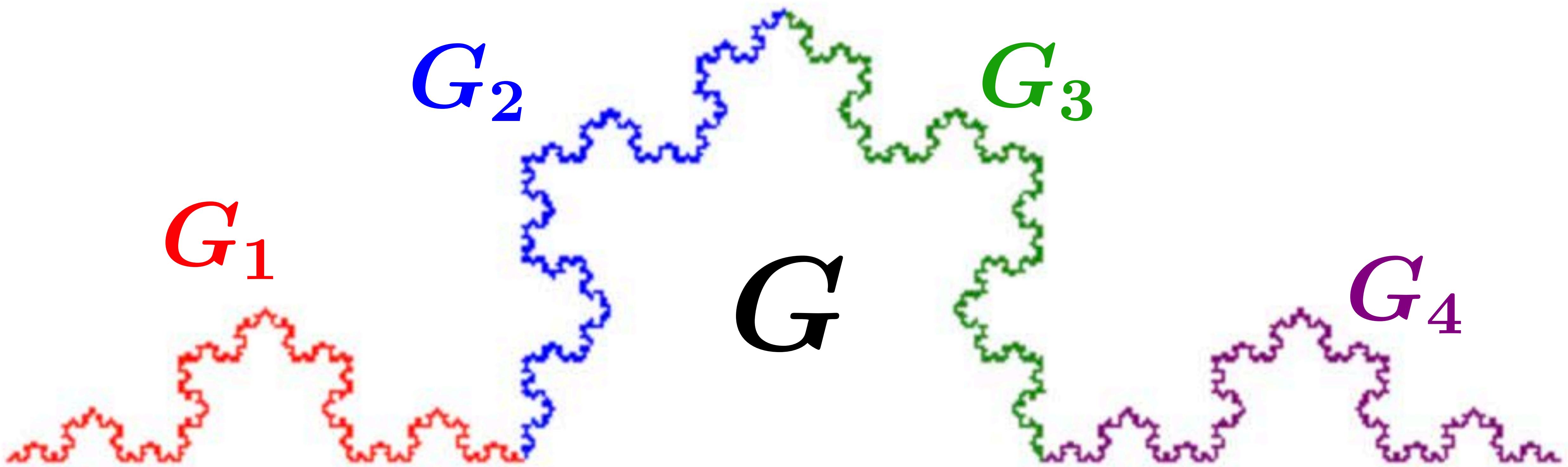
$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$

$$G_1 = \frac{1}{3} G$$



Dimensione del fiocco di Koch



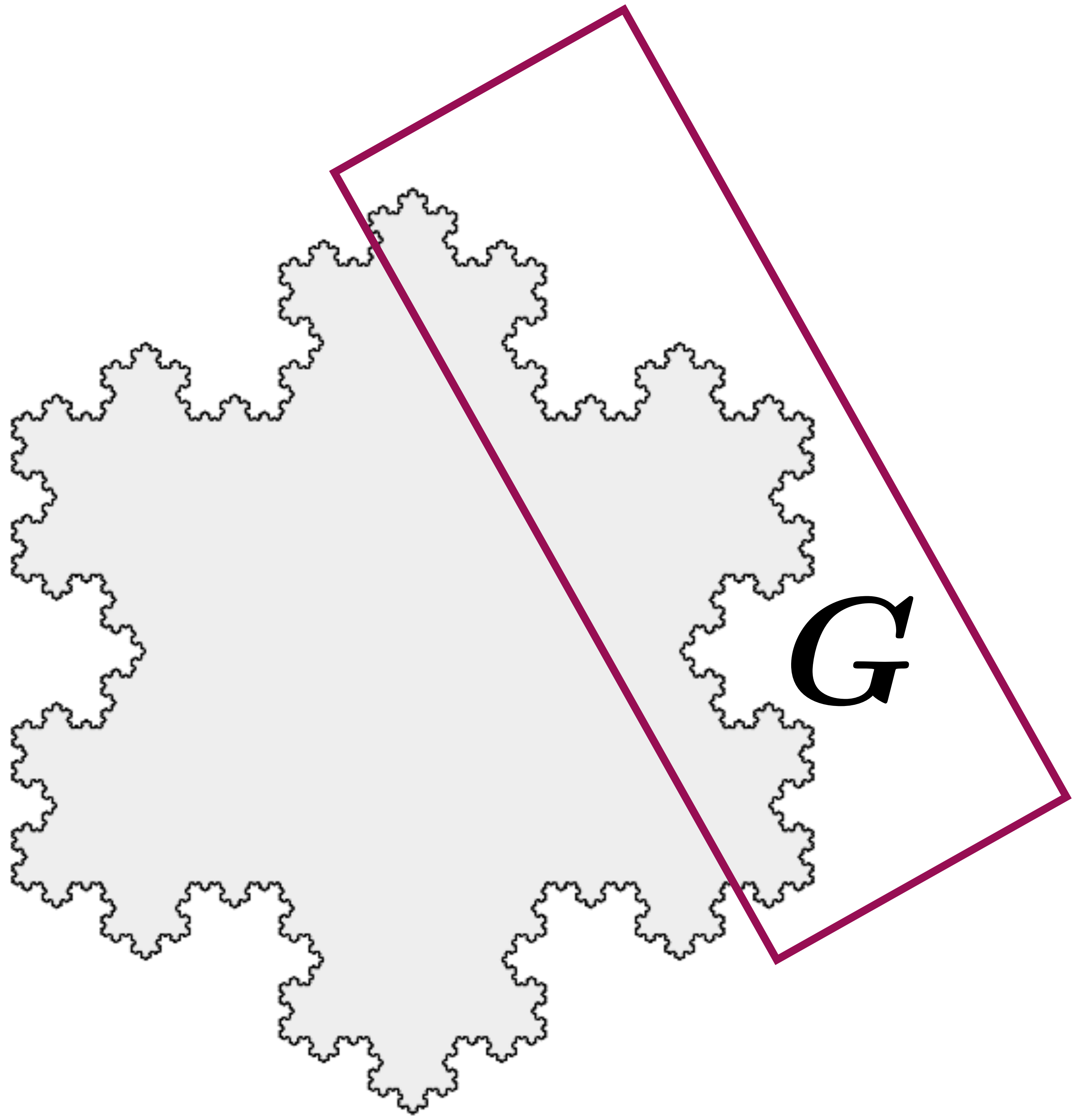


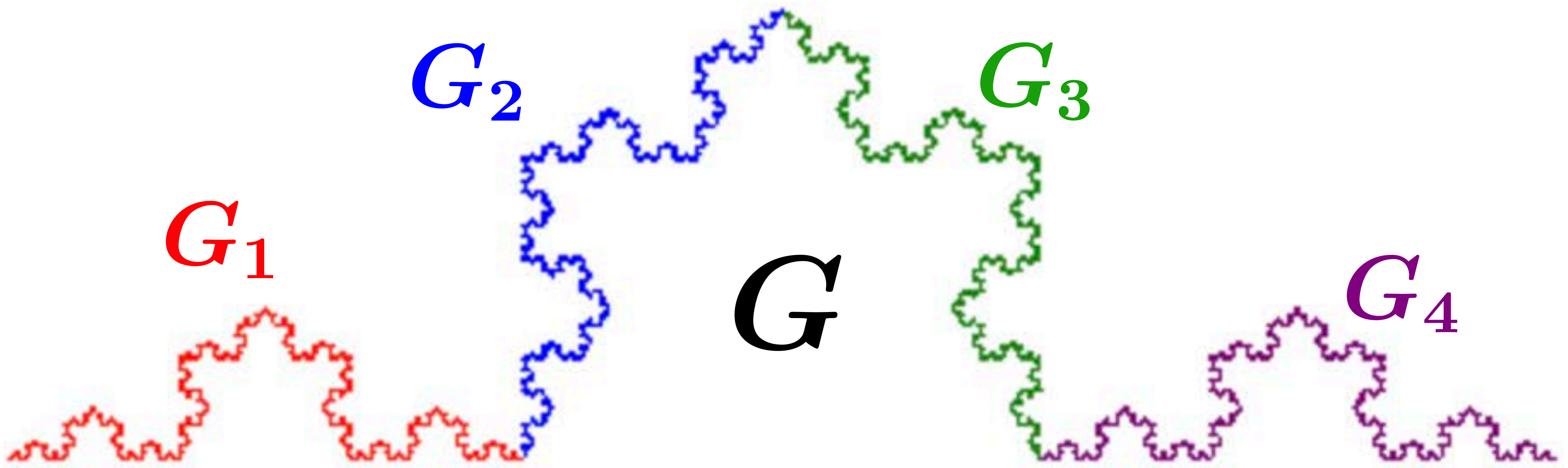
$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$

$$G_1 = \frac{G}{3}$$

G_2, G_3, G_4 isometrici a G_1

Dimensione del fiocco di Koch



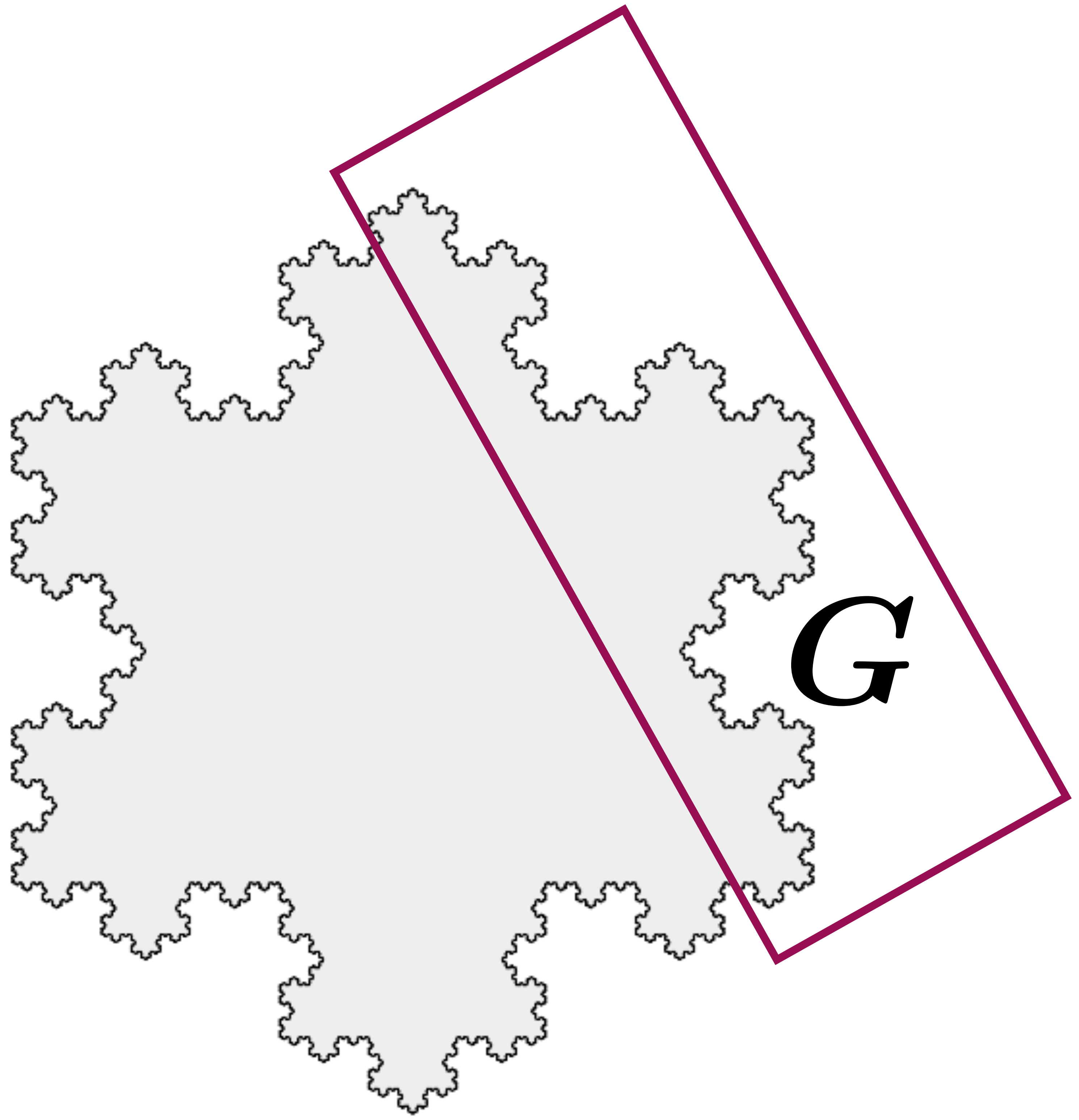


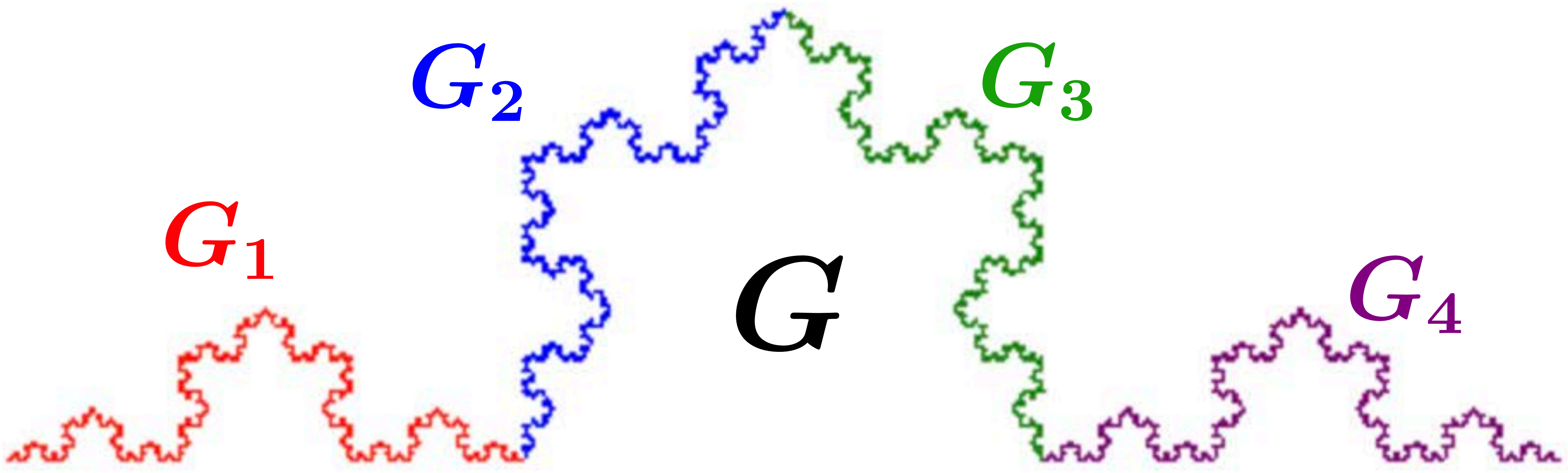
$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$

$$G_1 = \frac{G}{3} \qquad G_2, G_3, G_4 \text{ isometrici a } G_1$$

Supponiamo $\dim G = d \geq 0$ e $\lambda_d(G) > 0$, λ_d con proprietà delle misure.

Dimensione del fiocco di Koch





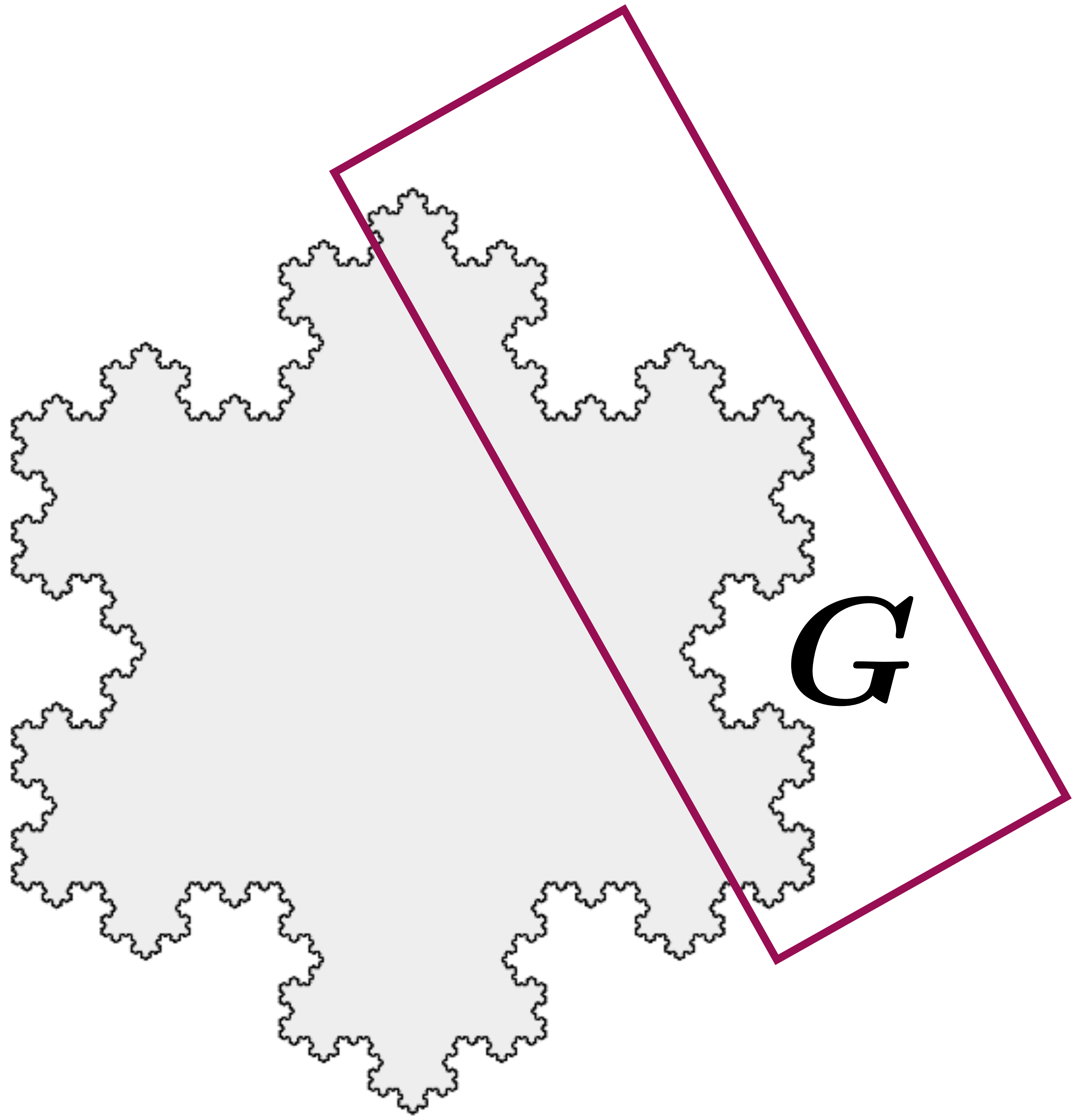
$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$

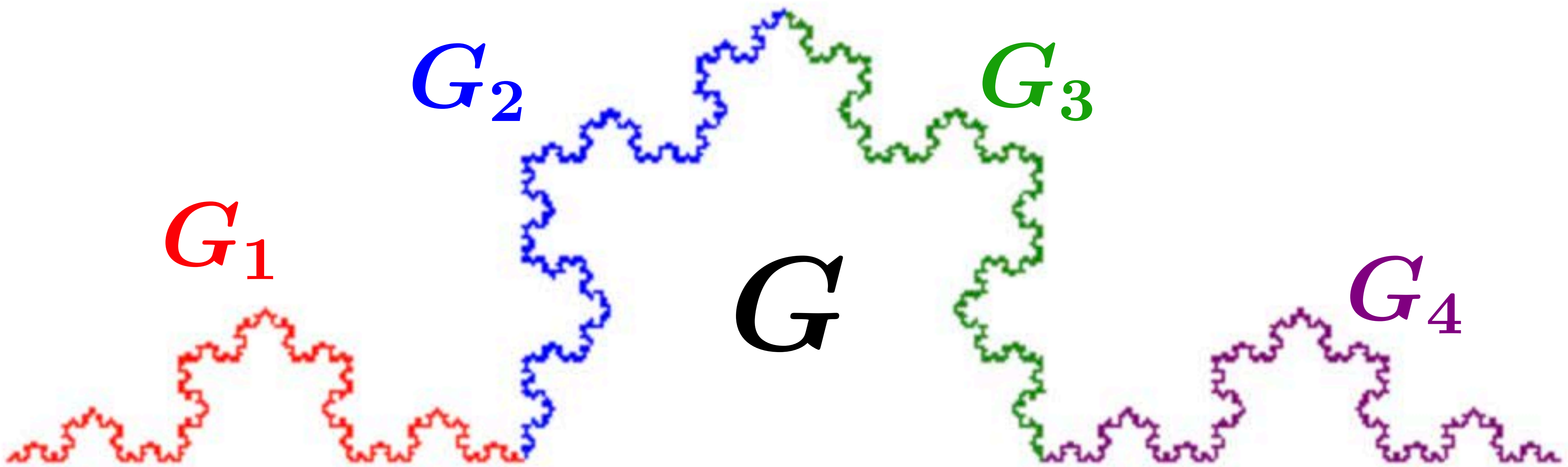
$$G_1 = \frac{G}{3} \qquad G_2, G_3, G_4 \text{ isometrici a } G_1$$

Supponiamo dim $G = d \geq 0$ e $\lambda_d(G) > 0$, λ_d con proprietà delle misure.

$$\lambda_d(G) = \lambda_d(G_1) + \lambda_d(G_2) + \lambda_d(G_3) + \lambda_d(G_4)$$

Dimensione del fiocco di Koch





$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$

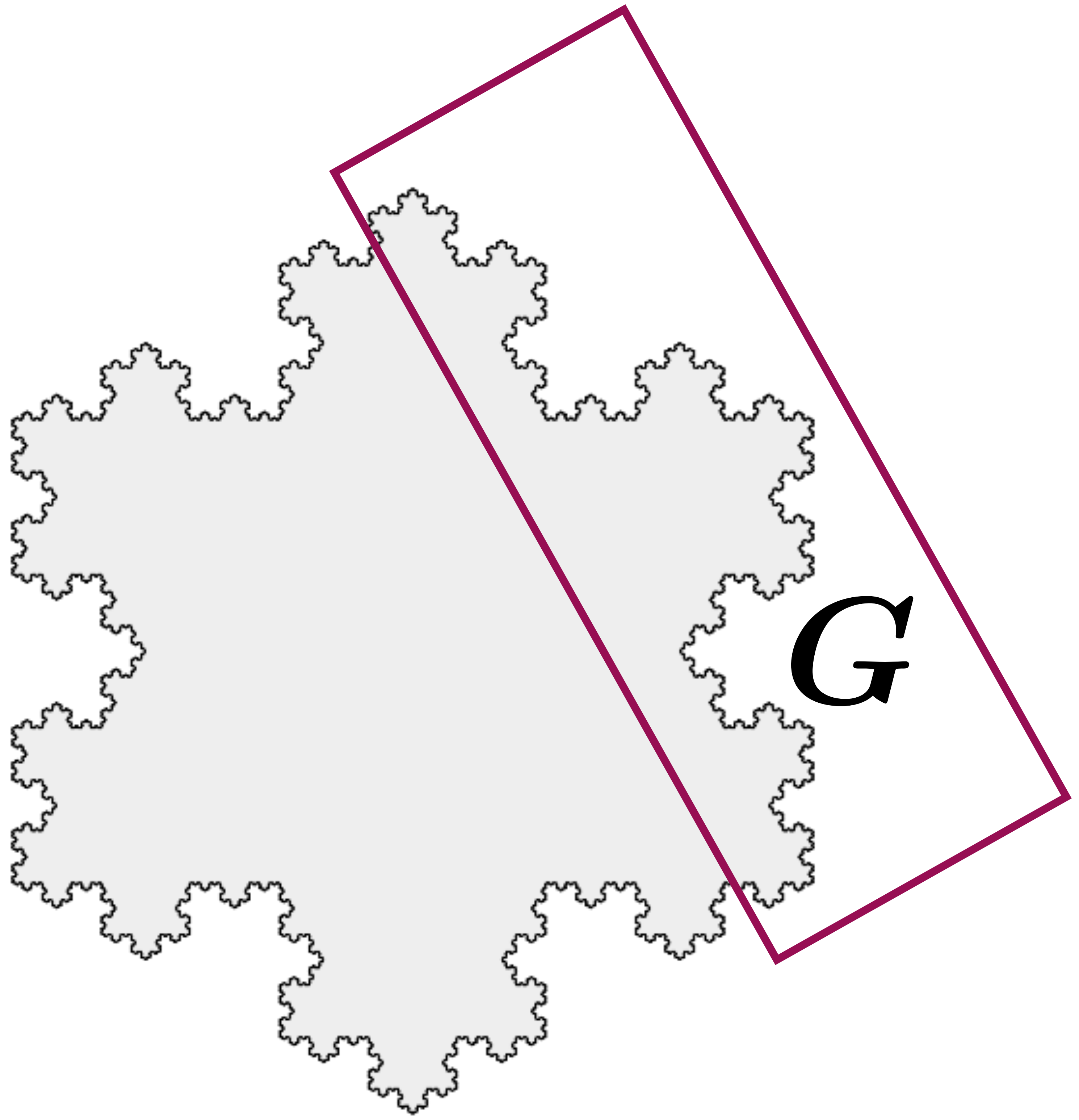
$$G_1 = \frac{G}{3}$$ G_2, G_3, G_4 isometrici a G_1

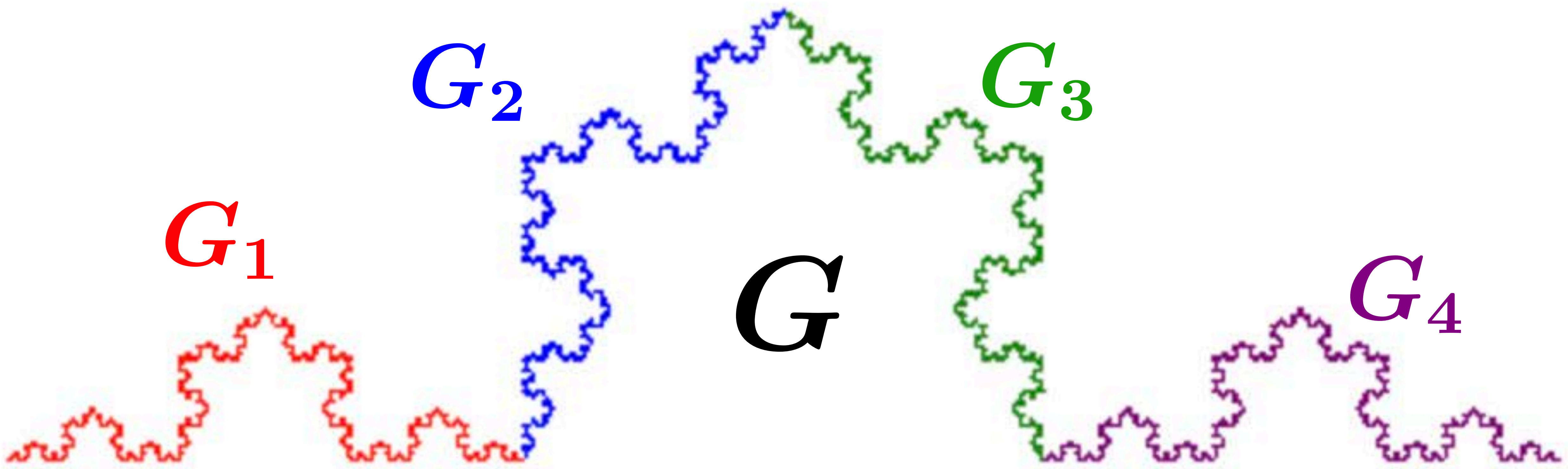
Supponiamo dim $G = d \geq 0$ e $\lambda_d(G) > 0$, λ_d con proprietà delle misure.

$$\lambda_d(G) = \lambda_d(G_1) + \lambda_d(G_2) + \lambda_d(G_3) + \lambda_d(G_4)$$

$$\lambda_d(G_4) = \lambda_d(G_3) = \lambda_d(G_2) = \lambda_d(G_1)$$

Dimensione del fiocco di Koch





$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$

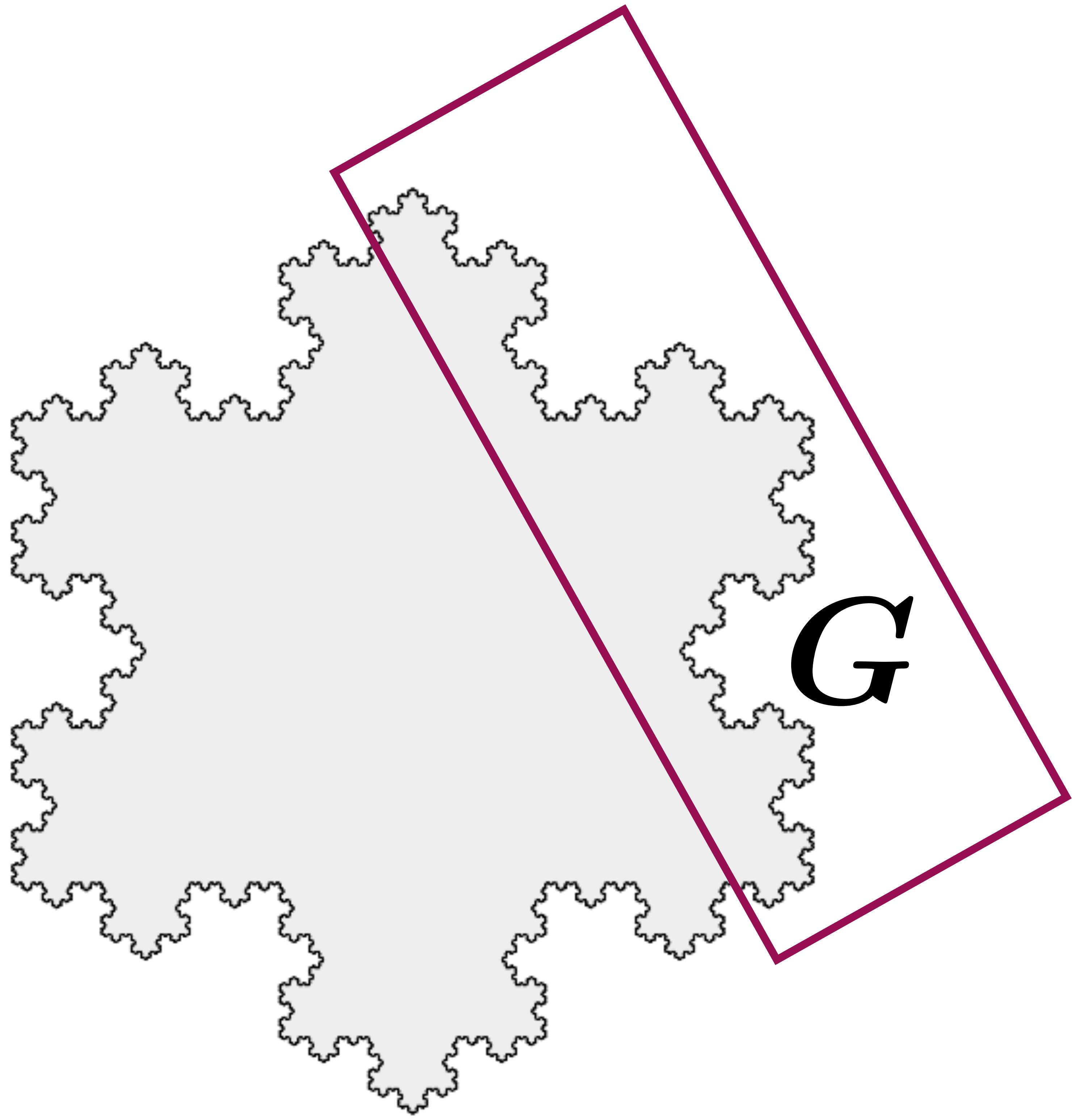
$$G_1 = \frac{G}{3} \qquad G_2, G_3, G_4 \text{ isometrici a } G_1$$

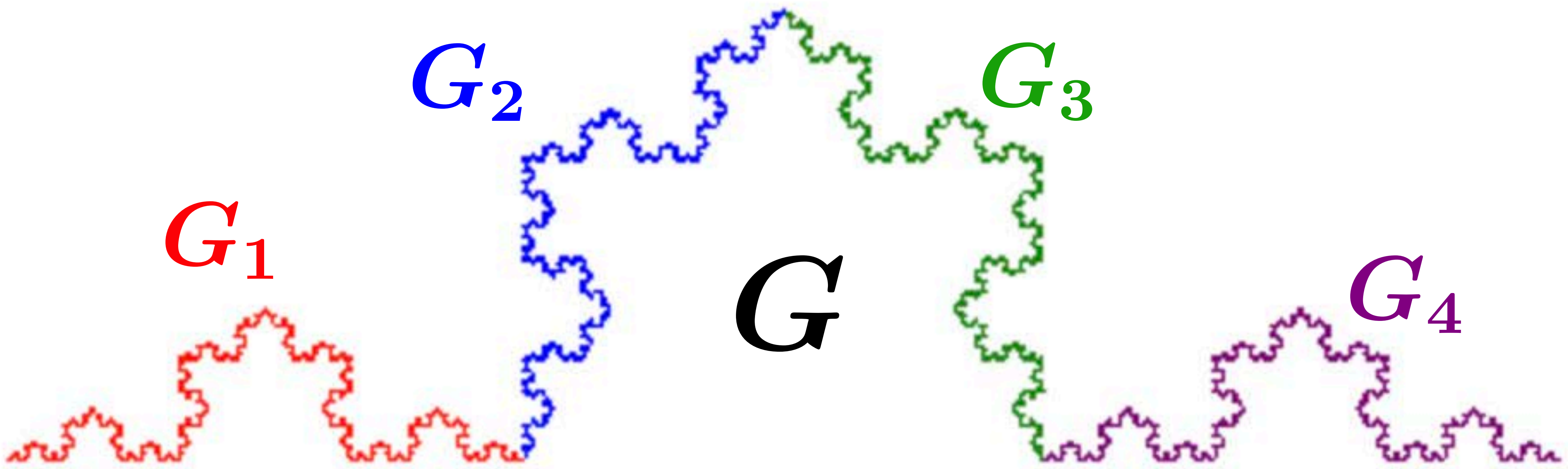
Supponiamo dim $G = d \geq 0$ e $\lambda_d(G) > 0$, λ_d con proprietà delle misure.

$$\lambda_d(G) = \lambda_d(G_1) + \lambda_d(G_2) + \lambda_d(G_3) + \lambda_d(G_4)$$

$$\lambda_d(G_4) = \lambda_d(G_3) = \lambda_d(G_2) = \lambda_d(G_1) = \lambda_d\left(\tfrac{1}{3}G\right)$$

Dimensione del fiocco di Koch





$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$

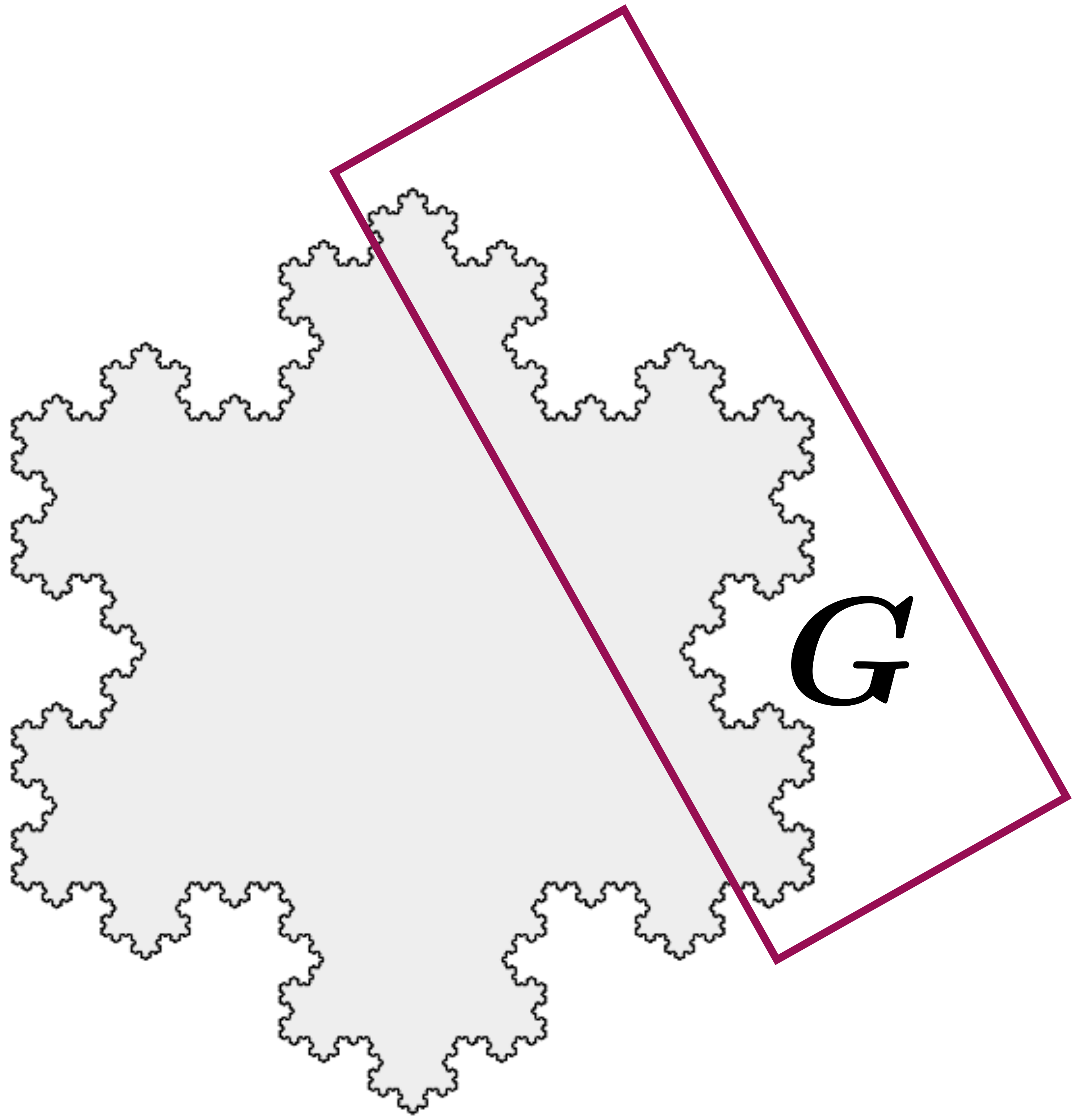
$$G_1 = \frac{G}{3} \qquad G_2, G_3, G_4 \text{ isometrici a } G_1$$

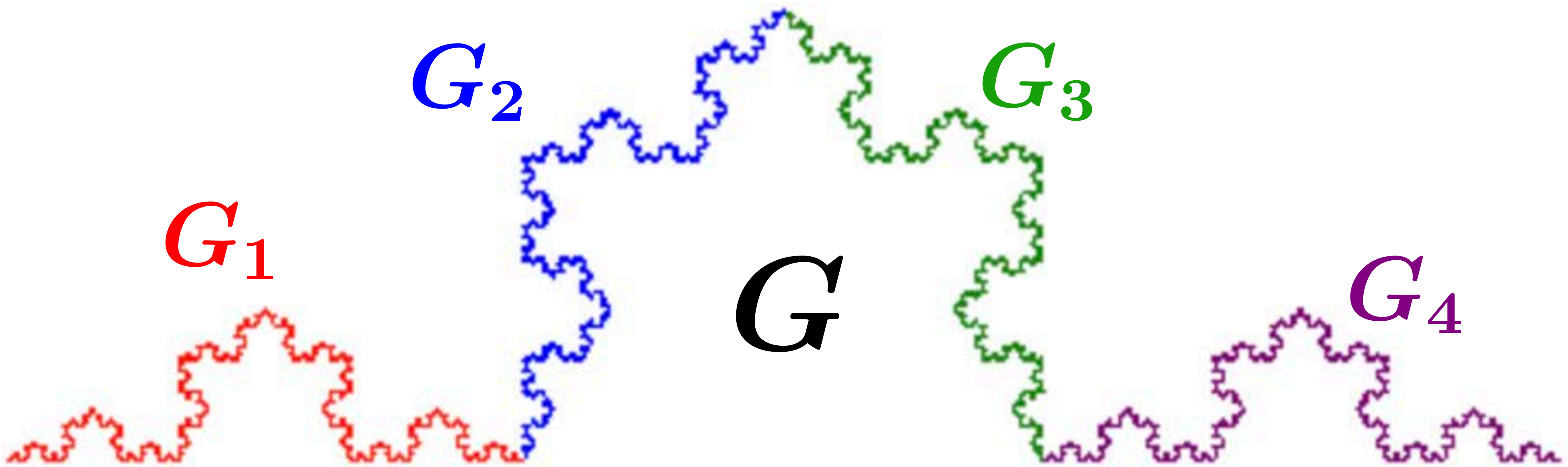
Supponiamo dim $G = d \geq 0$ e $\lambda_d(G) > 0$, λ_d con proprietà delle misure.

$$\lambda_d(G) = \lambda_d(G_1) + \lambda_d(G_2) + \lambda_d(G_3) + \lambda_d(G_4)$$

$$\lambda_d(G_4) = \lambda_d(G_3) = \lambda_d(G_2) = \lambda_d(G_1) = \lambda_d\left(\tfrac{1}{3}G\right) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^d \lambda_d(G)$$

Dimensione del fiocco di Koch





$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$

$$G_1 = \frac{G}{3} \qquad G_2, G_3, G_4 \text{ isometrici a } G_1$$

Supponiamo dim $G = d \geq 0$ e $\lambda_d(G) > 0$, λ_d con proprietà delle misure.

$$\boxed{\lambda_d(G) = \lambda_d(G_1) + \lambda_d(G_2) + \lambda_d(G_3) + \lambda_d(G_4) = 4\left(\tfrac{1}{3}\right)^d \lambda_d(G)}$$

$$\lambda_d(G_4) = \lambda_d(G_3) = \lambda_d(G_2) = \lambda_d(G_1) = \lambda_d\left(\tfrac{1}{3}G\right) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^d \lambda_d(G)$$

Supponiamo dim $G = d \geq 0$ e $\lambda_d(G) > 0$, λ_d con proprietà delle misure.

Supponiamo dim $G = d \geq 0$ e $\lambda_d(G) > 0$, λ_d con proprietà delle misure.

$$\lambda_d(G) = 4\left(\tfrac{1}{3}\right)^d \lambda_d(G)$$

Supponiamo dim $G = d \geq 0$ e $\lambda_d(G) > 0$, λ_d con proprietà delle misure.

$$\lambda_d(G) = 4\left(\frac{1}{3}\right)^d \lambda_d(G)$$

$$\frac{4}{3^d} = 1$$

Supponiamo dim $G = d \geq 0$ e $\lambda_d(G) > 0$, λ_d con proprietà delle misure.

$$\lambda_d(G) = 4\left(\tfrac{1}{3}\right)^d \lambda_d(G)$$

$$\frac{4}{3^d} = 1 \qquad\qquad 3^d = 4$$

Supponiamo dim $G = d \geq 0$ e $\lambda_d(G) > 0$, λ_d con proprietà delle misure.

$$\lambda_d(G) = 4\left(\frac{1}{3}\right)^d \lambda_d(G)$$

$$\frac{4}{3^d} = 1 \qquad 3^d = 4 \qquad \boxed{d = \frac{\log 4}{\log 3} \in]1, 2[}$$

Supponiamo dim $G = d \geq 0$ e $\lambda_d(G) > 0$, λ_d con proprietà delle misure.

$$\lambda_d(G) = 4\left(\tfrac{1}{3}\right)^d \lambda_d(G)$$

$$\frac{4}{3^d} = 1 \qquad 3^d = 4 \qquad \boxed{d = \frac{\log 4}{\log 3} \in]1, 2[}$$

La curva di Koch ha dimensione $d = \dfrac{\log 4}{\log 3} \in]1, 2[$

Supponiamo dim $G = d \geq 0$ e $\lambda_d(G) > 0$, λ_d con proprietà delle misure.

$$\lambda_d(G) = 4\left(\tfrac{1}{3}\right)^d \lambda_d(G)$$

$$\frac{4}{3^d} = 1 \qquad 3^d = 4 \qquad \boxed{d = \frac{\log 4}{\log 3} \in]1,2[}$$

La curva di Koch ha dimensione $d = \dfrac{\log 4}{\log 3} \in]1,2[$

frattali:= insiemi di dimensione non intera.

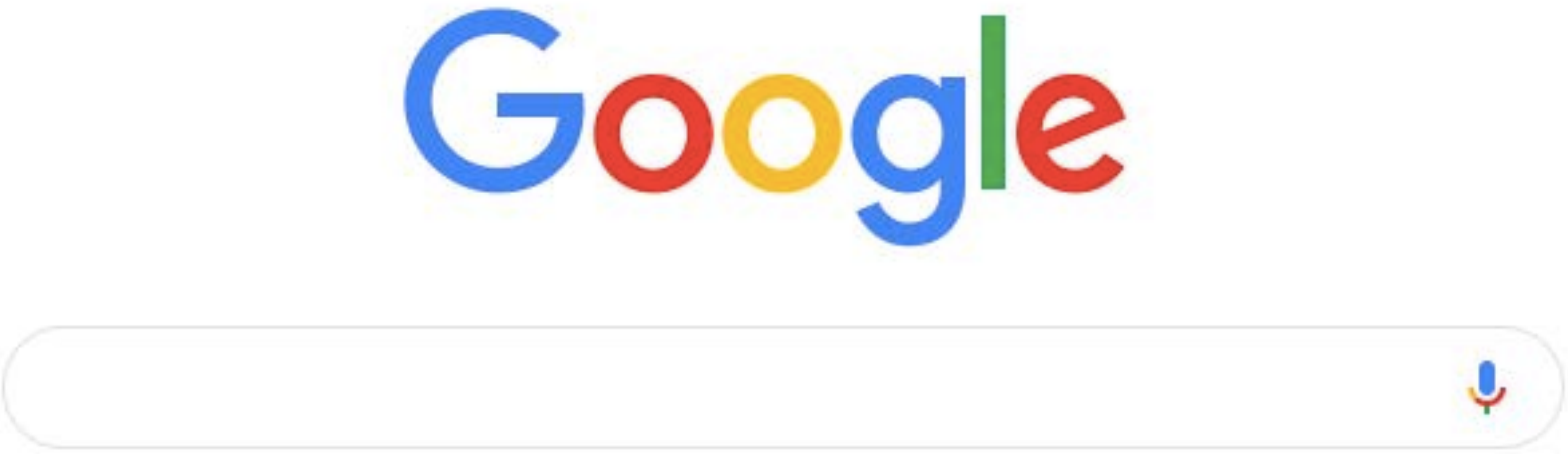
Il MOOC di Matematica di Base

Carlo Mariconda - Alberto Tonolo
Luigi Provenzano

Matematica di base - CISIA

Matematica di base - CISIA

Matematica di base - come trovarlo



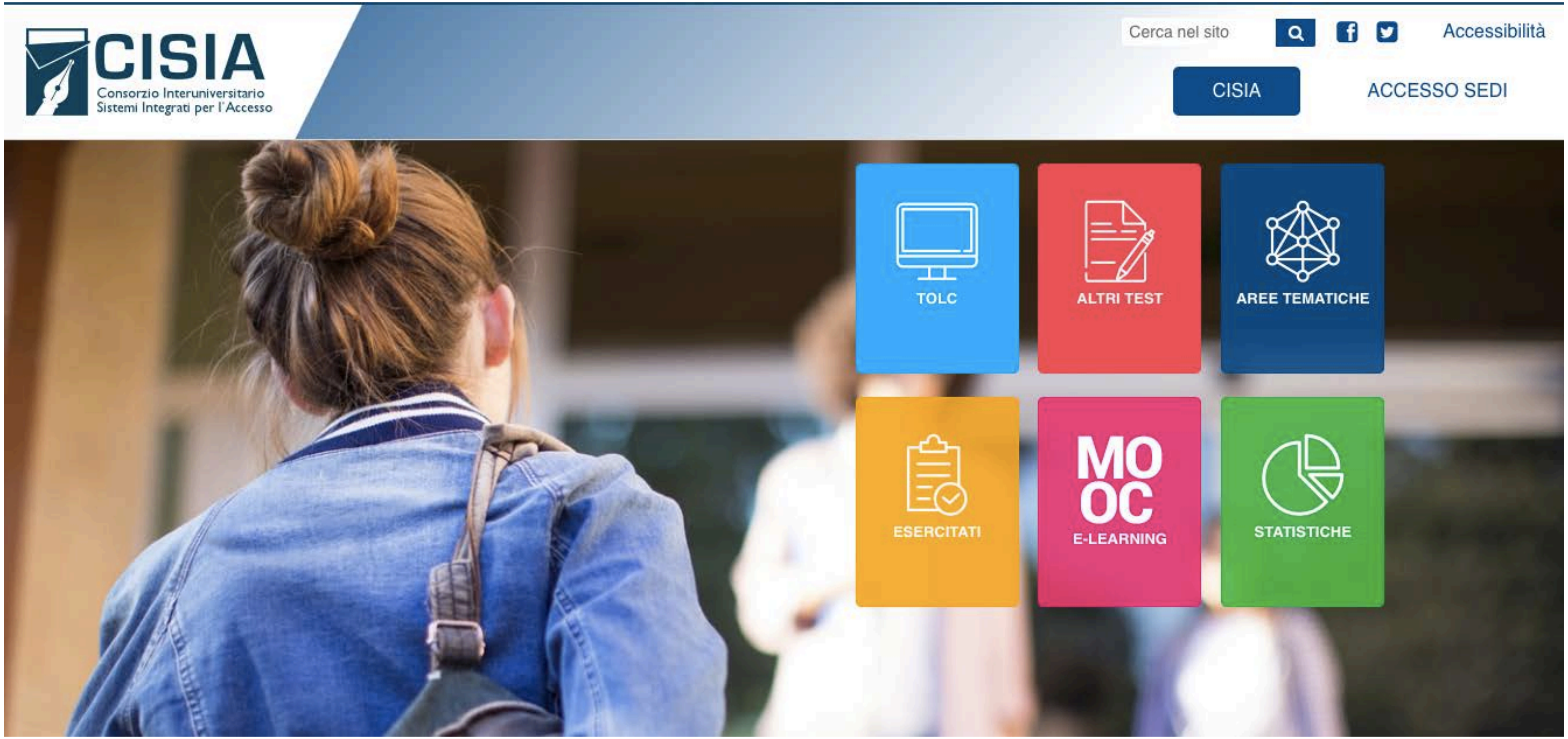
Matematica di base - come trovarlo

CISIA

Matematica di base - come trovarlo

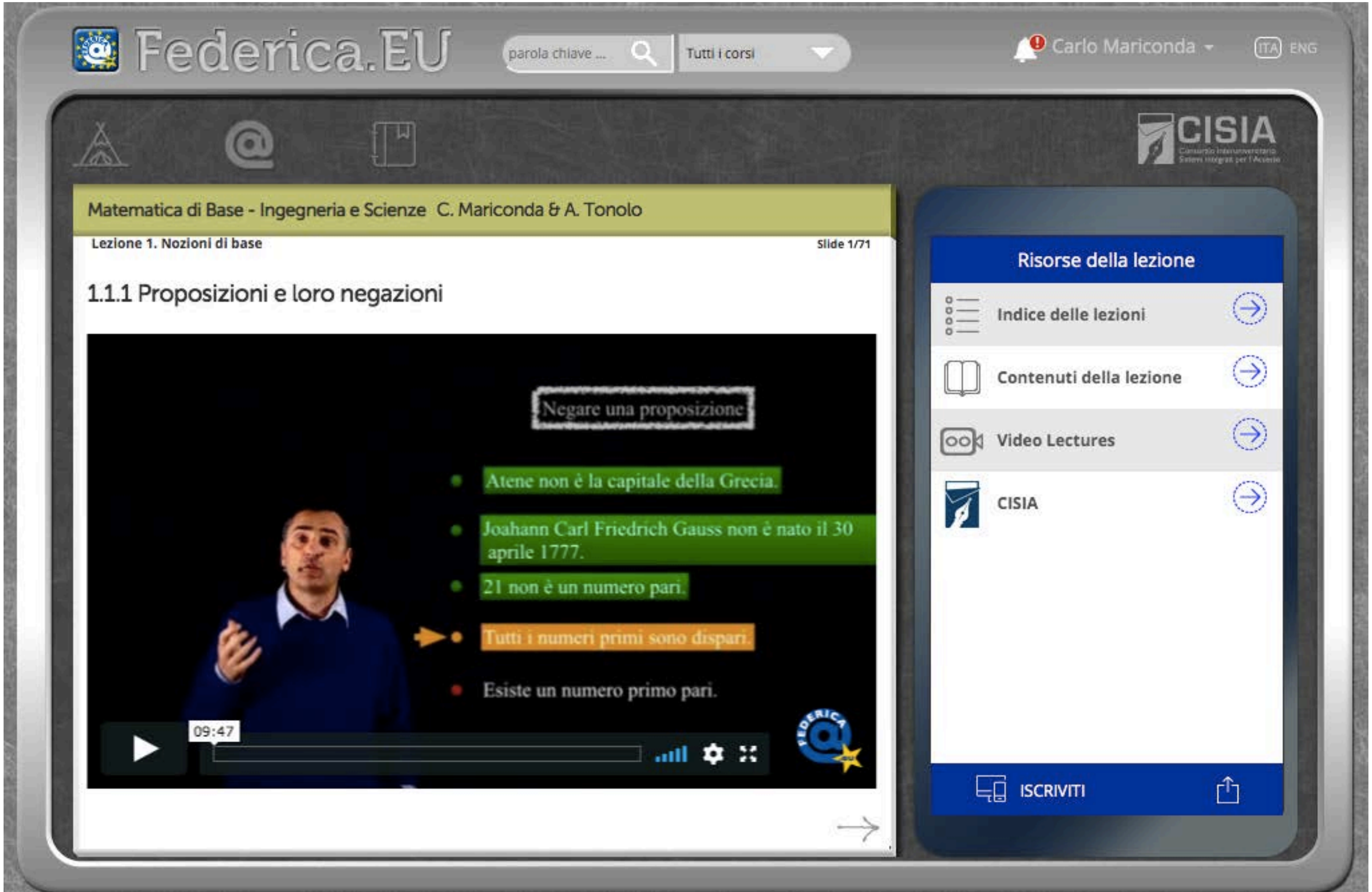
Google

CISIA

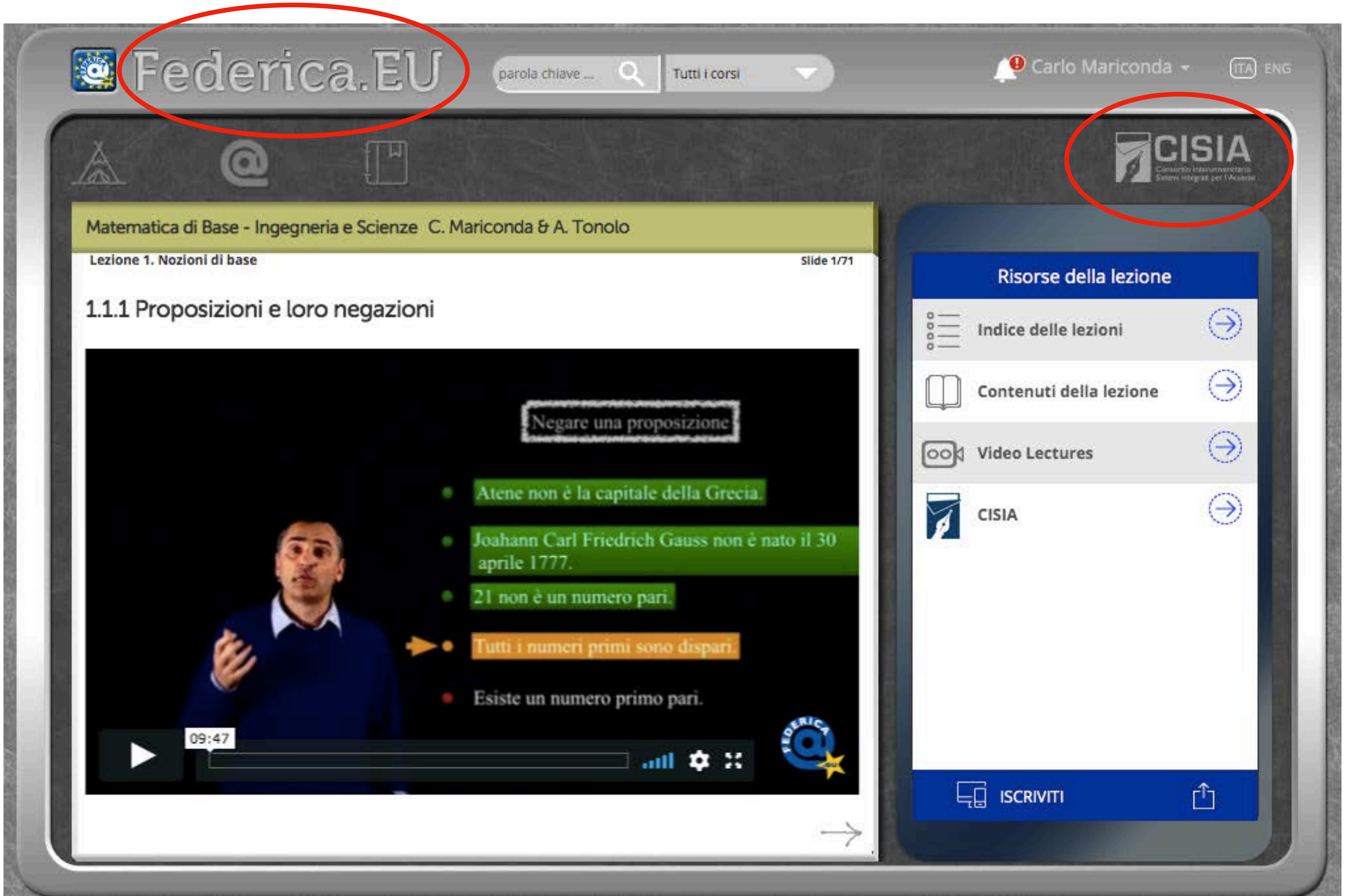


www.federica.eu/cisia/

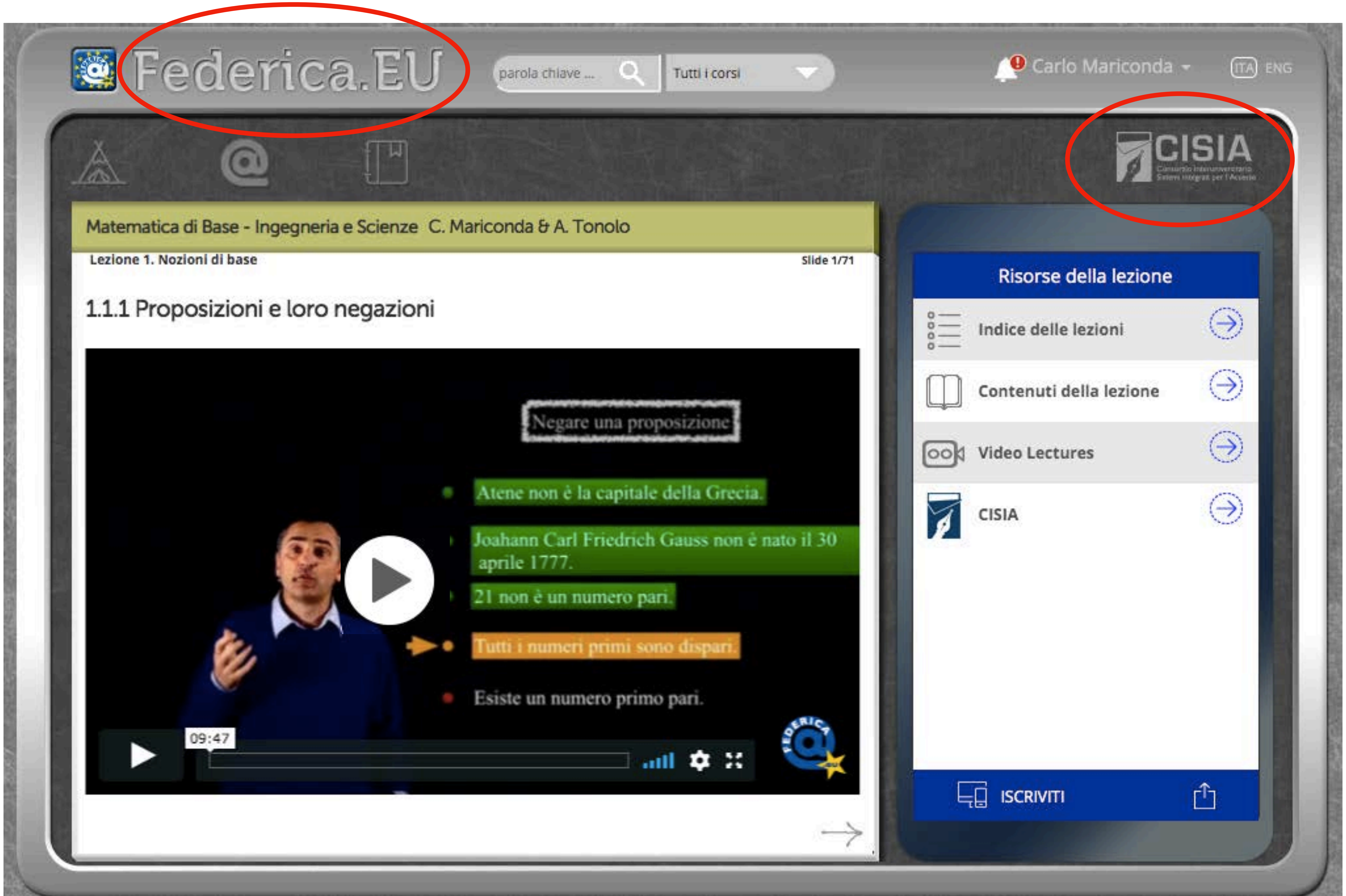
Matematica di base



Matematica di base



Matematica di base



Matematica di base

Matematica di base

Matematica di base

11 Lezioni: Syllabus TOLC CISIA

1. Nozioni di base

Matematica di base

11 Lezioni: Syllabus TOLC CISIA

1. Nozioni di base
2. Le funzioni
3. Combinatoria e probabilità
4. Numeri reali e potenze
5. Polinomi
6. Equazioni
7. Disequazioni
8. Geometria
9. Esponenziali e logaritmi
10. Trigonometria
11. Equazioni e disequazioni trigonometriche

Gli autori

Alberto Tonolo

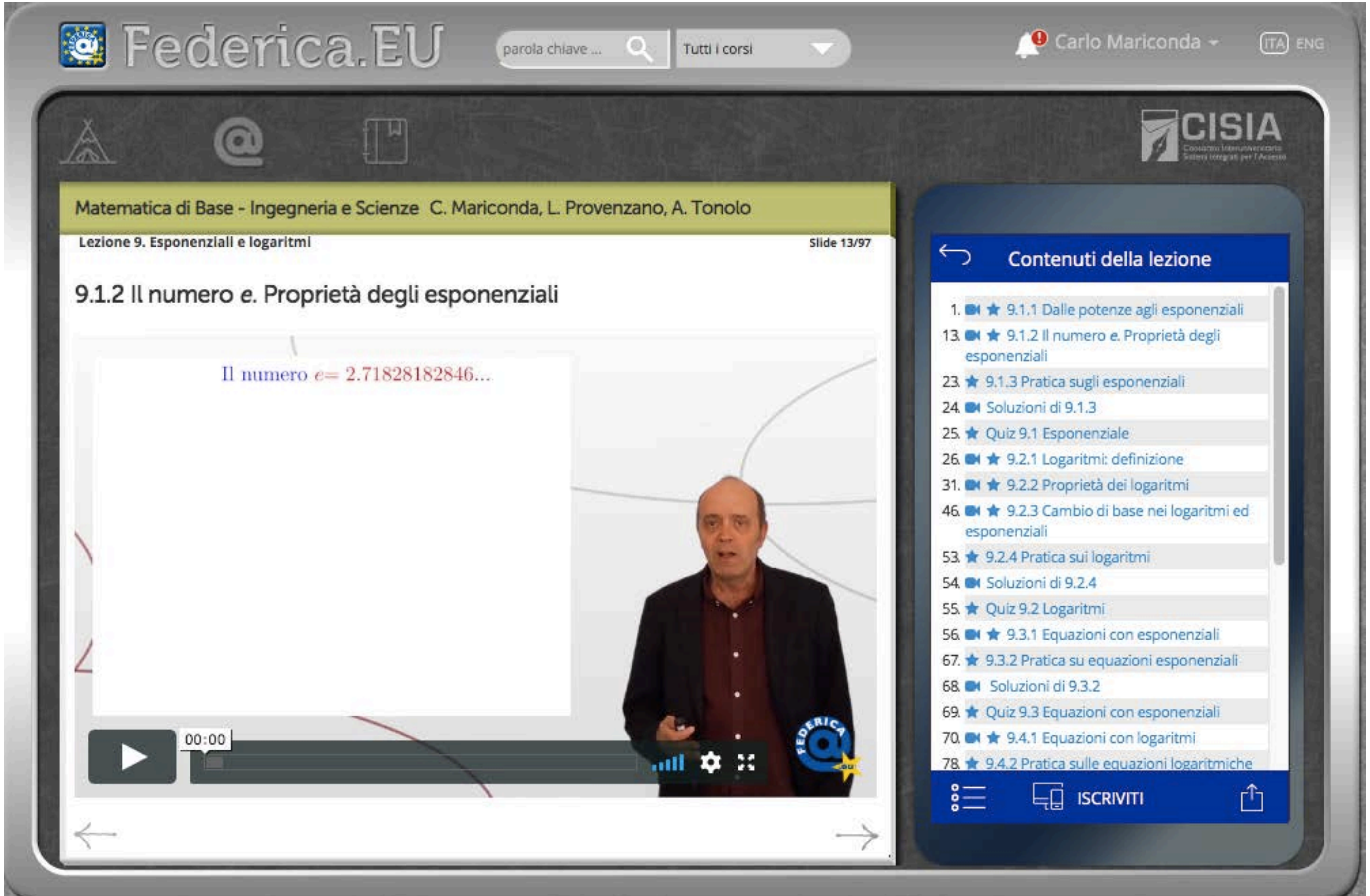
Gli autori

Carlo Mariconda

Alberto Tonolo

In ogni Lezione…

- Breve Spiegazione in video dei



9.1.2 Il numero *e*. Proprietà degli esponenziali

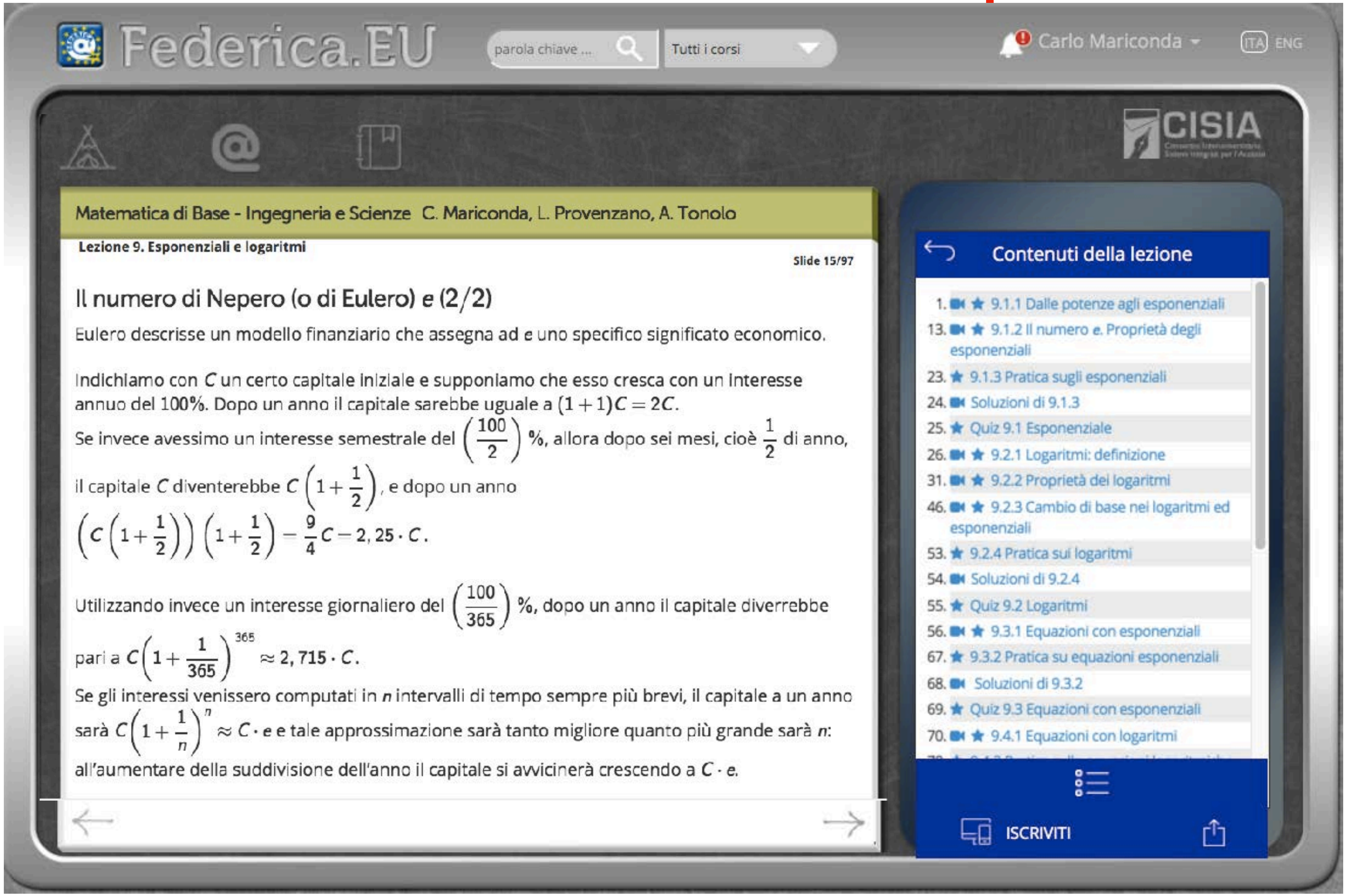
Il numero $e = 2.71828182846...$

9.1.2 Il numero *e*. Proprietà degli esponenziali

Il numero $e = 2.71828182846...$

In ogni Lezione…

- **Testo con spiegazioni ed esempi**



Il numero di Nepero (o di Eulero) e (2/2)

Eulero descrisse un modello finanziario che assegna ad e uno specifico significato economico.

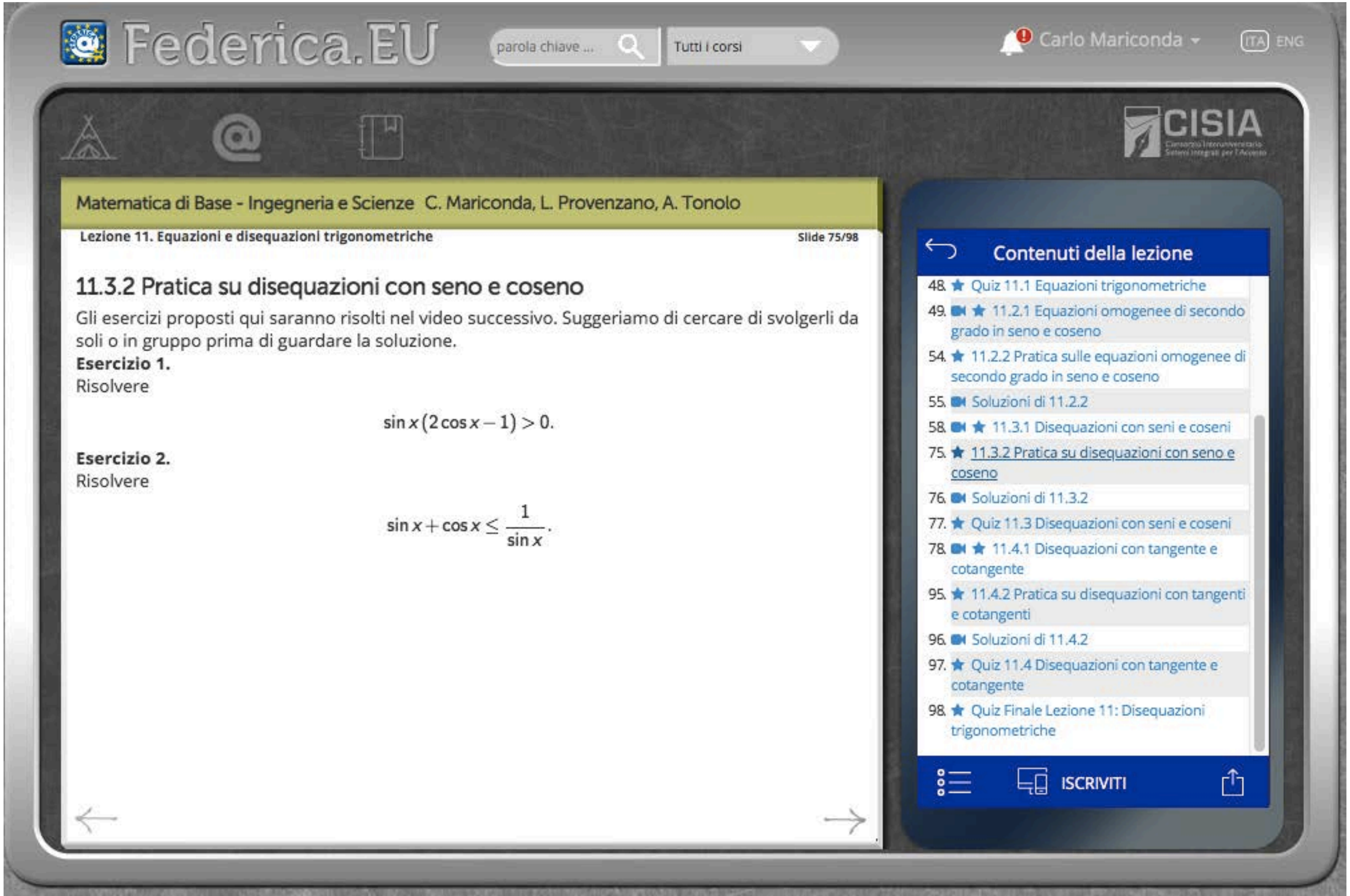
Indichiamo con C un certo capitale iniziale e supponiamo che esso cresca con un interesse annuo del 100%. Dopo un anno il capitale sarebbe uguale a $(1+1)C = 2C$.
Se invece avessimo un interesse semestrale del $\left(\frac{100}{2}\right)\%$, allora dopo sei mesi, cioè $\frac{1}{2}$ di anno, il capitale C diventerebbe $C\left(1+\frac{1}{2}\right)$, e dopo un anno

$$\left(C\left(1+\frac{1}{2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}C = 2,25 \cdot C.$$

Utilizzando invece un interesse giornaliero del $\left(\frac{100}{365}\right)\%$, dopo un anno il capitale diverrebbe pari a $C\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2,715 \cdot C$.
Se gli interessi venissero computati in n intervalli di tempo sempre più brevi, il capitale a un anno sarà $C\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \approx C \cdot e$ e tale approssimazione sarà tanto migliore quanto più grande sarà n: all'aumentare della suddivisione dell'anno il capitale si avvicinerà crescendo a $C \cdot e$.

In ogni Lezione…

- **Esercizi proposti**



11.3.2 Pratica su disequazioni con seno e coseno

Gli esercizi proposti qui saranno risolti nel video successivo. Suggeriamo di cercare di svolgerli da soli o in gruppo prima di guardare la soluzione.

Esercizio 1.
Risolvere

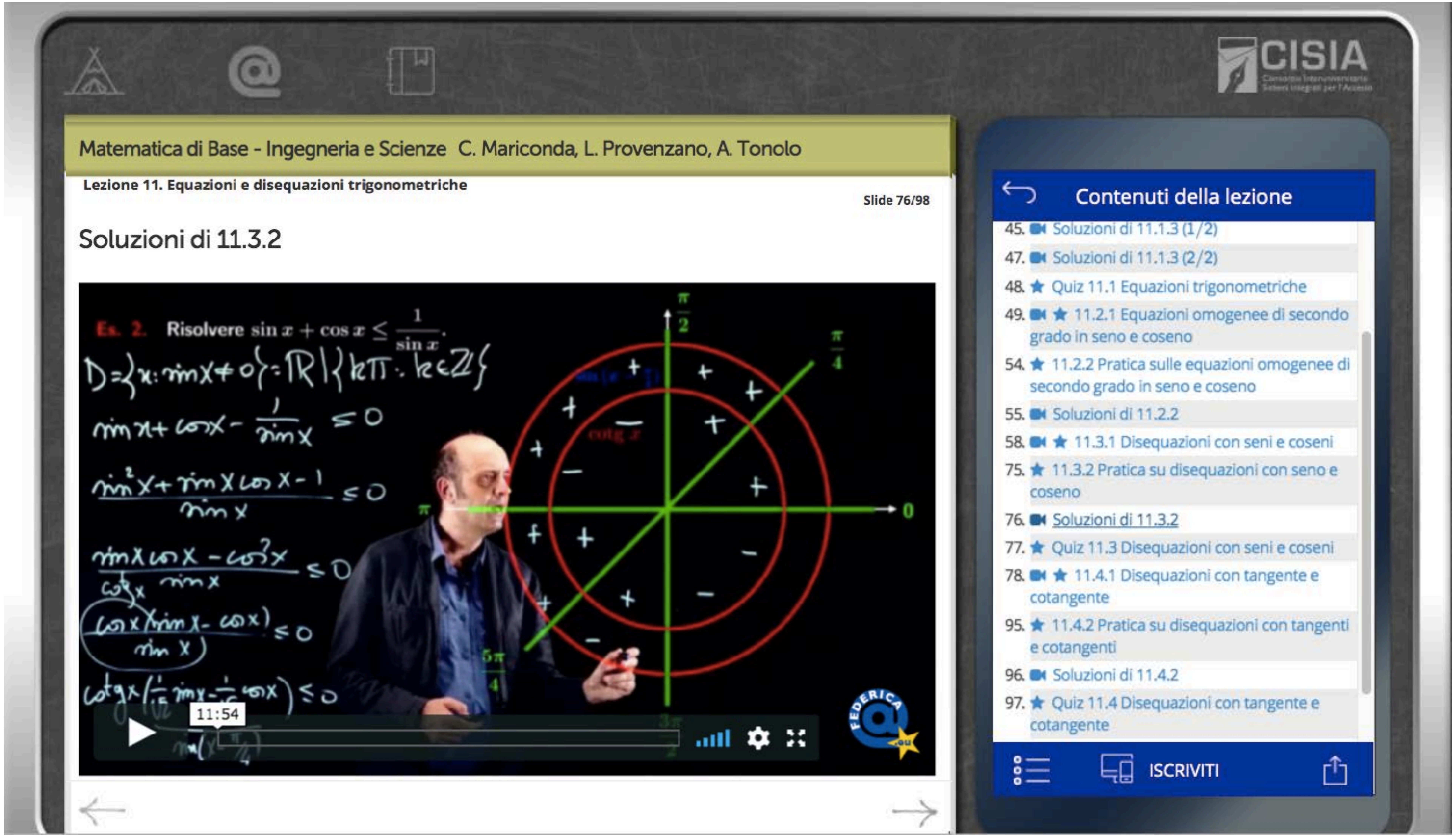
$$\boxed{\sin x\,(2\cos x - 1) > 0.}$$

Esercizio 2.
Risolvere

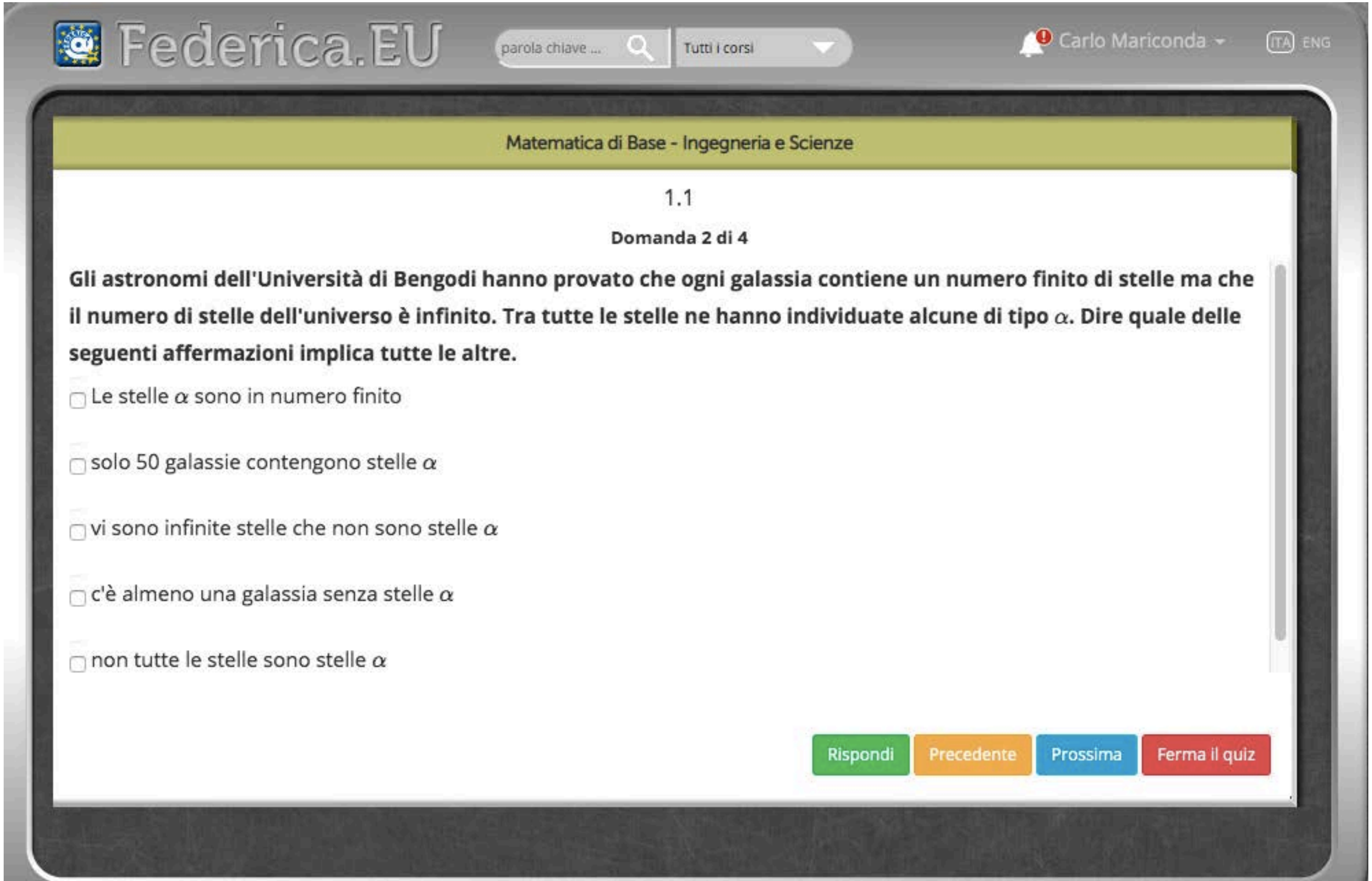
$$\sin x + \cos x \leq \frac{1}{\sin x}.$$

In ogni Lezione…

- Soluzioni in video

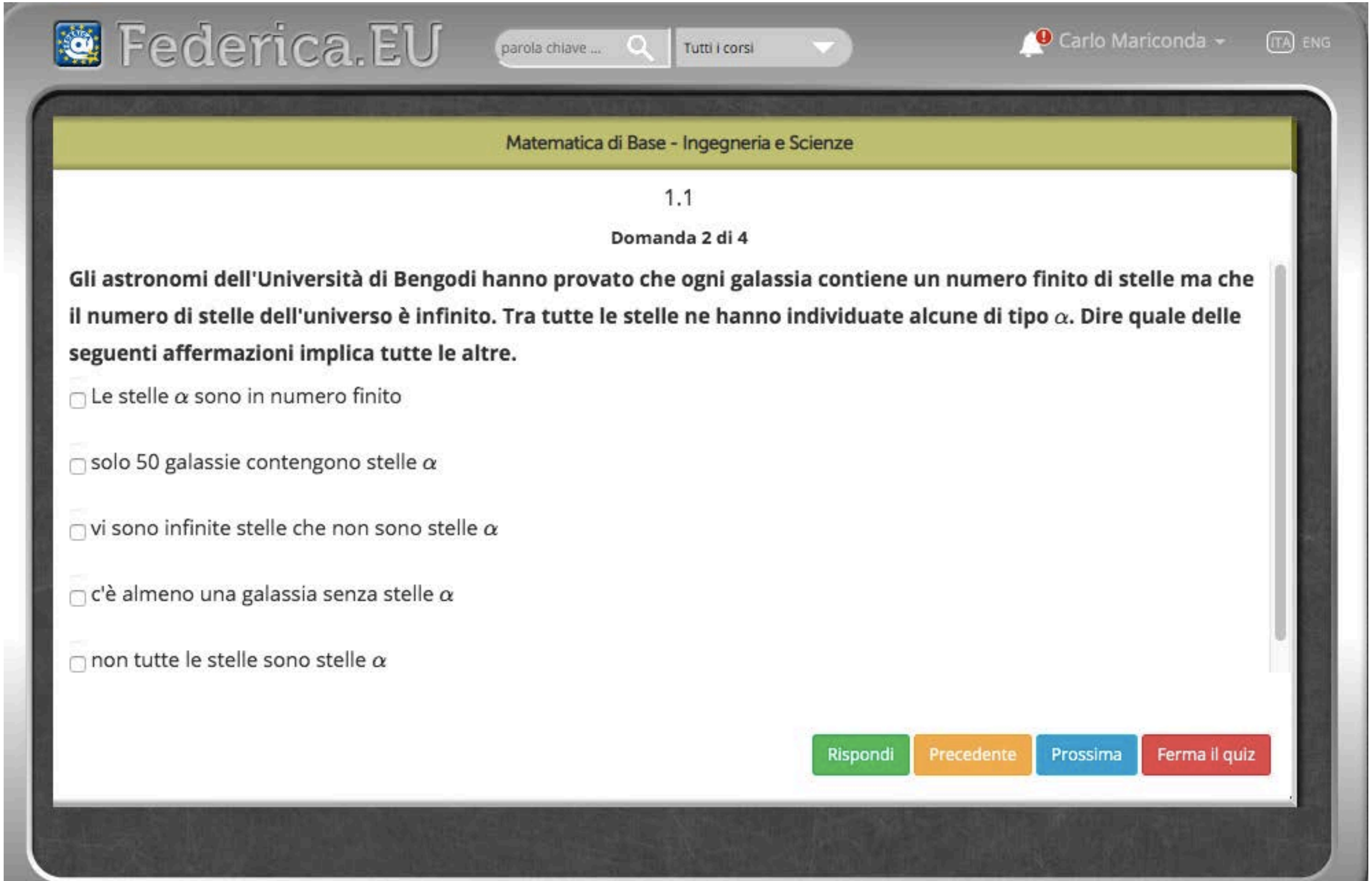


In ogni Lezione…



In ogni Lezione...

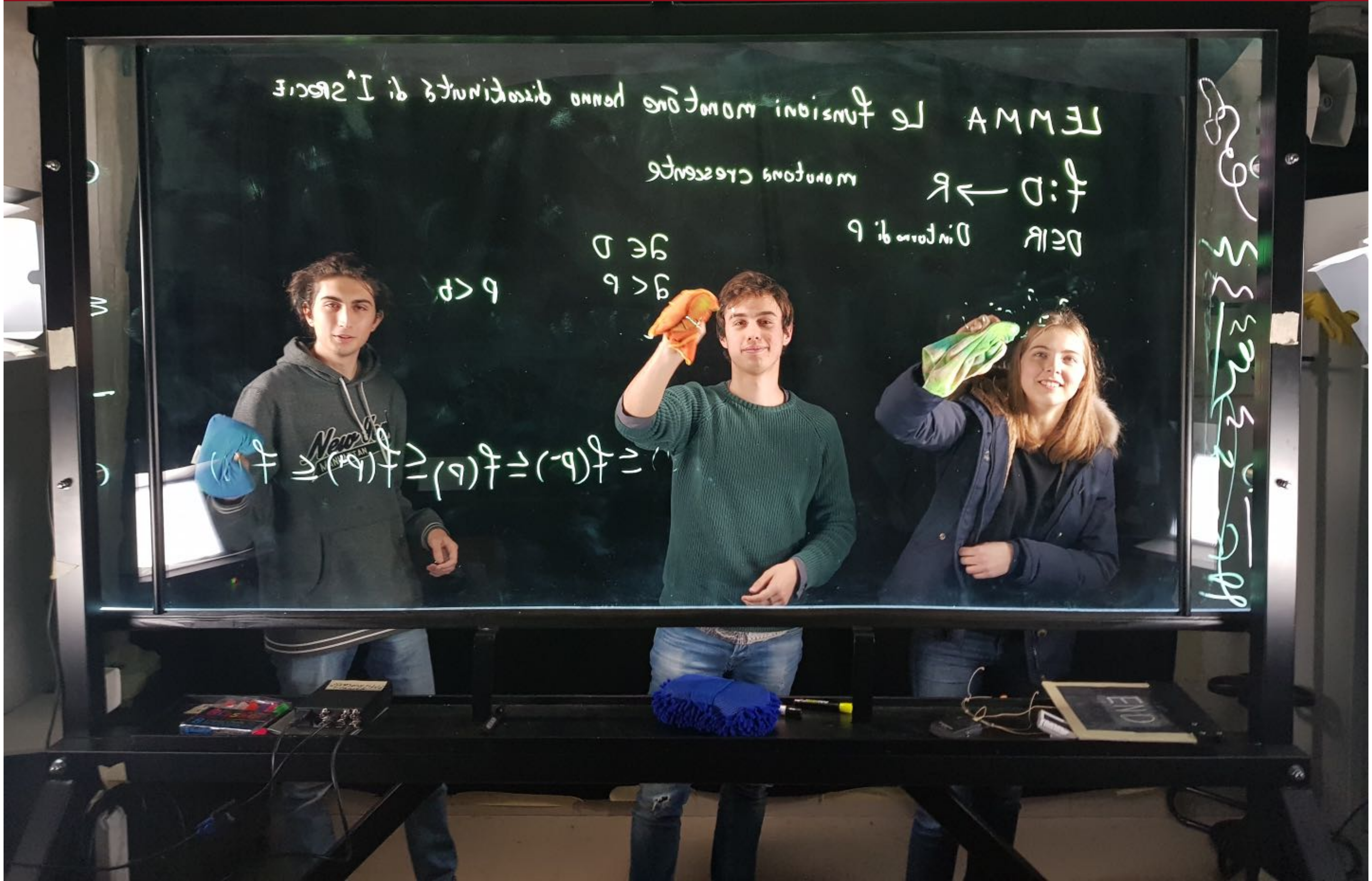
Quiz di autoverifica



Nuovi strumenti: Lightboard "BoardOnAir"

Università degli Studi di Padova

Lightboard "BoardOnAir"



Università degli Studi di Padova

Lightboard "BoardOnAir"

Lightboard "BoardOnAir"

Lightboard "BoardOnAir"

Lightboard "BoardOnAir"

Lightboard "BoardOnAir"

Lightboard "BoardOnAir"

Lightboard "BoardOnAir"

Lightboard "BoardOnAir"

Lightboard "BoardOnAir"

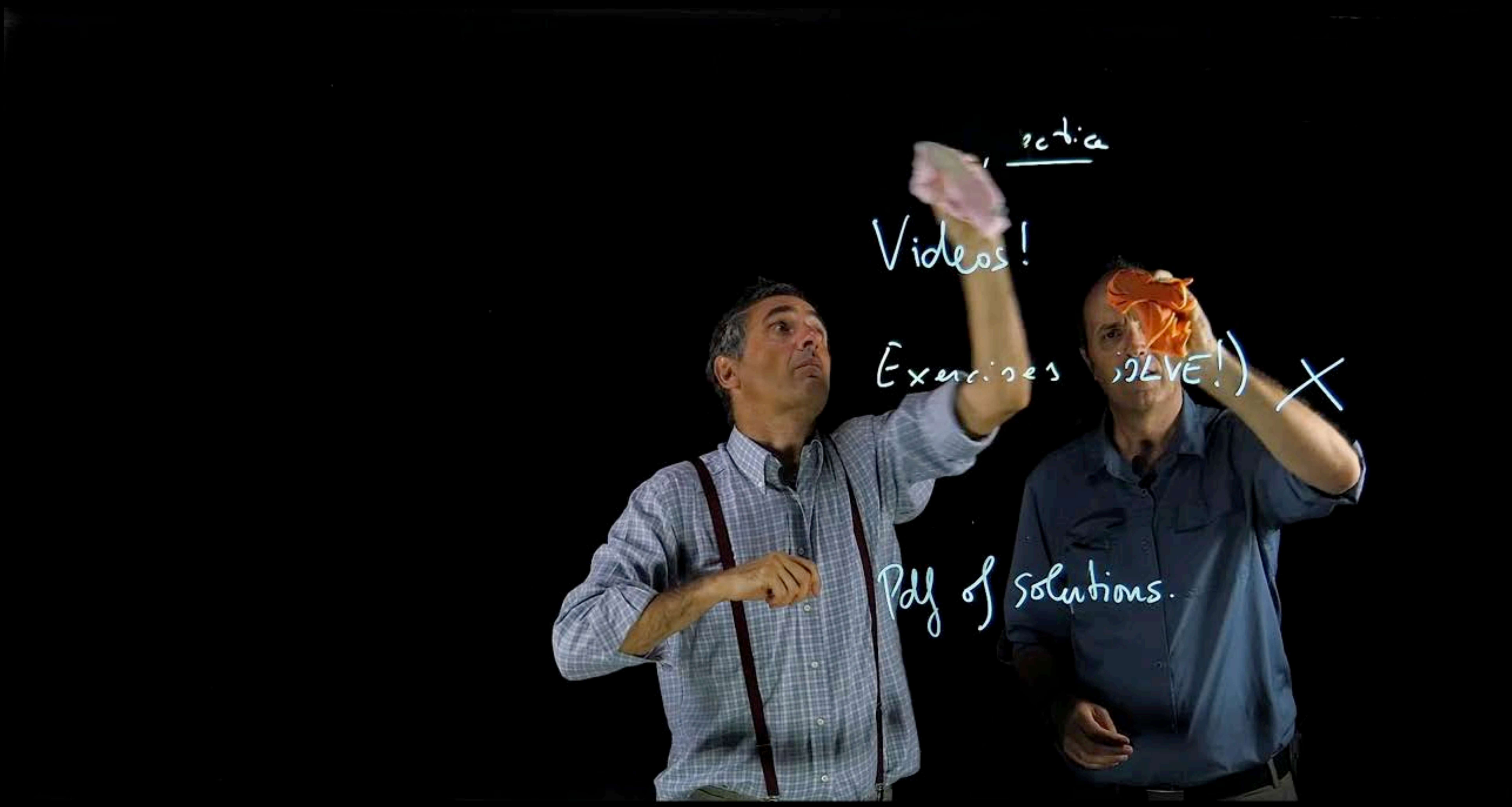
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Lightboard "BoardOnAir"

Lightboard "BoardOnAir"

Università degli Studi di Padova

Lightboard "BoardOnAir"




Videos!
Exercises
Pdf of solutions.