

I TEST DI LOGICA

Alberto Zanardo

Dipartimento di Matematica

Università di Padova

I.T.I, “Marzotto”, Valdagno

24 febbraio 2014

RUOLO DEI TEST

Valutazione di:

Conoscenze di base (syllabus)

Capacità di ragionamento (elaborazione di nozioni)

A volte uno stesso test valuta i due aspetti

Tra i test specificamente del secondo tipo troviamo quelli di “logica” (e spesso quelli di “aritmetica”)

LOGICA E RAGIONAMENTO

La Logica è la scienza del ragionamento corretto?

A volte sì, a volte no

Nei test pretende di esserlo

Ci viene chiesto di fare un “ragionamento logico”
per rispondere ad una domanda

PERCHE' PROPRIO LA LOGICA?

Dovrebbe essere alla base dei ragionamenti che facciamo tutti i giorni.

Non ha prerequisiti.

PROBLEMA

E' vero che la logica che usiamo nei ragionamenti di tutti i giorni è la stessa che ci viene richiesta nei test di logica?

NON SEMPRE

Esistono conflitti tra logica e senso comune

CONFLITTI TRA LOGICA E SENSO COMUNE

Se allora ...

Se il poligono P è un quadrato,
allora ha tutti i lati uguali

E se P non è un
quadrato?

Se c'è il sole, allora vado al mare

E se piove?

RAGIONANDO “LOGICAMENTE”

Se c'è il sole, allora vado al mare

Da un punto di vista strettamente logico questa frase non dà informazioni su cosa faccio se non c'è il sole.

E' quanto intendiamo nei discorsi di tutti i giorni?

NO!

RAGIONANDO “LOGICAMENTE”

Infatti diciamo:

Se c'è il sole, **allora** vado al mare, ma potrei andarci anche se non c'è il sole.

Da un punto di vista strettamente logico la precisazione sottolineata è superflua, mentre nel linguaggio naturale non lo è.

SE ALLORA

Quando piove Mario prende l'ombrello

Se piove, allora Mario prende l'ombrello

Vogliamo dimostrare che questa
implicazione non è sempre vera

Aspetto che piovano

Ma se non piove mai?

SE ALLORA

Se piove, allora Mario prende l'ombrello

Se non piove mai non riesco a rendere
falsa quella proposizione

Per poter falsificare un'implicazione devo
rendere vero l'antecedente
(e poi rendere falso il conseguente)

SE ALLORA

Se $0 = 1$ allora domani piove

Non potrò mai rendere falsa questa implicazione.

Quindi concludo che è vera.

C'è una forte assunzione sottostante! Quale?

OGNI AFFERMAZIONE E' VERA OPPURE FALSA

SE ALLORA

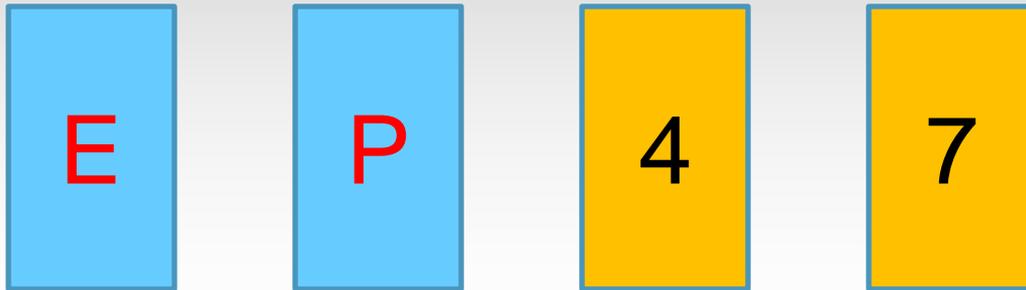
Se $0 = 1$ allora domani piove

Osservazione sensata:
cosa c'entra

Studio delle “implicazioni rilevanti”

TEST DI WASON

Le carte che su una faccia hanno una vocale, sull'altra faccia hanno un numero pari (implicazione nascosta: vocale implica num. pari)



Quali carte controlliamo per vedere se la regola è verificata? (vogliamo il numero minimo di controlli)

TEST DI WASON

Le carte che su una faccia hanno una vocale, sull'altra faccia hanno un numero pari



SI



NO



NO



SI

TEST DI WASON

Chi ha meno di 16 anni, non può comperare alcolici.
La polizia ferma 4 ragazzi.

- Alberto ha più di 16 anni
- Bruno ha meno di 16 anni
- Carlo ha comperato alcolici
- Dario non ha comperato alcolici

Per chi è necessario un ulteriore controllo?

CONFLITTI TRA LOGICA E SENSO COMUNE

'e' (and, \wedge , &)

In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali
e sono minori di 90°

In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono
minori di 90° e sono uguali

Mi spoglio e faccio la doccia

Metto i guanti da forno e prendo la pentola bollente

Nel senso comune c'è spesso una dimensione temporale

CONFLITTI TRA LOGICA E SENSO COMUNE

'o' (or, \vee)

Considero il triangolo ABC. L'angolo in A è acuto **oppure** l'angolo in B è acuto.

Vado al mare **oppure** metto in ordine il garage

Compero una macchina nuova **oppure** faccio una lunga vacanza

Cosa succede in matematica?

In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali
e sono minori di 90°

Considero il triangolo ABC. L'angolo in A è acuto oppure
l'angolo in B è acuto.

Relazioni tra 'e' e 'o'

Non è vero che ho una barca e ho una moto

Non ho una barca oppure non ho una moto

non (A e B) equivale a (non A) o (non B)

Relazioni tra 'e' e 'o'

Non è vero che ho una barca o ho una moto

Non ho una barca e non ho una moto

non (A o B) equivale a (non A) e (non B)

TORNIAMO ALL'IMPLICAIZONE

Se A allora B

Quattro possibilità:

A vero, B vero

Implicazione VERA

A vero, B falso

Implicazione **FALSA**

A falso, B vero

Implicazione VERA

A falso, B falso

Implicazione VERA

CONFRONTO CON 'oppure'

non-A oppure B

Quattro possibilità:

A vero, B vero VERA

A vero, B falso **FALSA**

A falso, B vero VERA

A falso, B falso VERA

Relazione tra implicazione e 'oppure'

Se A allora B
equivale a
non-A oppure B

E infatti “Se A allora B” è sempre vera
quando A è falso, oppure quando B è vero

Relazione tra implicazione e 'e'

non (se A allora B)
equivale a
A e non-B

Infatti, “se A allora B” è falso
quando A è vero e B è falso

CONFLITTI TRA LOGICA E SENSO COMUNE

alcuni, tutti (\exists , \forall)

Alcuni pesci vivono nell'acqua

Alcune biciclette hanno il cambio

Solo alcune biciclette hanno il cambio

CONFLITTI TRA LOGICA E SENSO COMUNE

Un test per medicina:

Se è vero che «alcune biciclette hanno gli ammortizzatori», allora è necessariamente vera anche una delle affermazioni seguenti. Quale?

Se comperi una bicicletta, questa può non avere gli ammortizzatori

Le biciclette con gli ammortizzatori sono le migliori

Sarebbe stato meglio scrivere:

Anche se oggi non è così, un giorno tutte le biciclette avranno gli ammortizzatori

Se è vero che «**solo** alcune biciclette hanno gli ammortizzatori», allora è necessariamente vera anche una delle affermazioni seguenti. Quale?

Non può esistere una bicicletta senza ammortizzatori

ANALISI DEL TEST

Cosa significa “alcuni”?

Nel linguaggio naturale ‘alcuni’ viene spesso inteso come ‘alcuni, ma non tutti’, cioè come ‘solo alcuni’.

ANALISI DEL TEST

Cosa significa “alcuni”?

Può essere anche inteso come la negazione di “nessuno”

E' vero che nessun mammifero vive nell'acqua? NO

Quindi alcuni mammiferi vivono nell'acqua.

E' vero che nessun pesce vive nell'acqua? NO

Quindi alcuni i pesci vivono nell'acqua.

ANALISI DEL TEST

Cosa significa “alcuni”?

E' vero che nessun pesce vive nell'acqua? NO

Quindi alcuni i pesci vivono nell'acqua.

Se vogliamo che ‘alcuni’ significhi ‘alcuni, ma non tutti’, dobbiamo rinunciare a vedere ‘alcuni’ come negazione di ‘nessuno’

Cosa succede in matematica?

“alcuni” non è in contrasto con “tutti”

“alcuni” è la negazione di “nessuno”

$\exists x$ tale che A equivale a non $\forall x$ non A)

$\forall x A$ equivale a non $\exists x$ tale che non A)

ALTRI ESEMPI

Professore, bisogna studiare il capitolo sei o il capitolo sette? Sì

Se hai fame, c'è del prosciutto in frigorifero.
E' un'implicazione?

No! Tuttavia ...

Se hai fame, allora guarda nel frigorifero.
C'è del prosciutto.

ALTRI ESEMPI

Se qualcuno fa cadere il bicchiere, allora il bicchiere si rompe. Il bicchiere è rotto,

Anche nel linguaggio naturale sappiamo di non poter concludere che qualcuno l'ha fatto cadere. Tuttavia

Confronto con “se c'è il sole vado al mare”

RICAPITOLANDO

Non sempre logica e senso comune vanno d'accordo

(questo vuol dire che il senso comune è sbagliato?)

Serve molta cautela nel preparare i test

INTELLIGENZA ARTIFICIALE

Ricerca di una 'logica' vicina al senso comune

Sono sul marciapiede, davanti alle strisce pedonali, e voglio attraversare. Una macchina si ferma. Io attraverso.

Se cerco di avere la dimostrazione logica che quella macchina non ripartirà all'improvviso, resto lì per sempre.

L'avverbio “solo”

Solo alcune biciclette hanno gli ammortizzatori

Da una pubblicità:

I biscotti xxx sono prodotti con farina integrale

Si vuole passare l'idea che

i biscotti xxx sono prodotti solo con farina integrale

L'avverbio “solo”

Da un'indagine su un gruppo di persone che ha usato un certo prodotto dimagrante, risulta che il 95% ha perso 5 chili in due mesi.

In quei due mesi hanno solo usato il prodotto dimagrante?

O hanno anche fatto una lunga passeggiata tutti i giorni?

L'avverbio “solo”

Chi è giovane veste xxx

Equivale a: “Tutti i giovani vestono xxx”
(che in generale è falso)

Ma di fatto si vuole trasmettere l'idea che
“chi veste xxx è giovane”, cioè:

Solo chi è giovane veste xxx

CAVALIERI E FURFANTI

Ambiente tipico dei test: ci sono cavalieri e furfanti, i primi dicono sempre il vero, i secondi sempre il falso. Dalle loro risposte dobbiamo trarre informazioni.

CAVALIERI E FURFANTI

Versione classica:

Ad un bivio ci sono due persone: A e B. So che una è un cavaliere e l'altra un furfante, ma non so quale.

Dispongo di una sola domanda per sapere quale strada porta al castello. Cosa chiedo?

Chiedo ad A: “se chiedessi a B la strada per andare al castello, cosa mi risponderebbe?”

CAVALIERI E FURFANTI

Una persona dice: “io sono un furfante”

Può succedere una cosa del genere?

Se invece quella persona appartiene ad un gruppo e dice: “siamo tutti furfanti”, cosa possiamo concludere?

CAVALIERI E FURFANTI

Di X e Y sappiamo solo che sono furfanti o cavalieri. X dice: “siamo due furfanti”. Cosa possiamo dedurre?

X e Y sono entrambi furfanti.

X e Y sono entrambi cavalieri.

X è cavaliere e Y furfante.

X è furfante e Y cavaliere.

CAVALIERI E FURFANTI

Di X e Y sappiamo solo che sono furfanti o cavalieri. X dice: “almeno uno di noi è cavaliere”. Cosa possiamo dedurre?

- | | |
|--------------------------------|-----------|
| X e Y sono entrambi furfanti. | Possibile |
| X e Y sono entrambi cavalieri. | Possibile |
| X è cavaliere e Y furfante. | Possibile |
| X è furfante e Y cavaliere. | |

CAVALIERI E FURFANTI

Come prima: A dice: “almeno uno di noi è cavaliere”.
Quale delle seguenti implicazioni è sicuramente vera?

Se A è cavaliere allora B è cavaliere.

Se A è cavaliere allora B è furfante.

Se A è furfante allora B è cavaliere.

Se A è furfante allora B è furfante.

ALTRI ESEMPI

Ad un tavolo circolare si siedono dei cavalieri e dei furfanti e ciascuno di loro afferma che la persona alla sua destra è un furfante. Cosa si può dedurre?

- A) Sono tutti furfanti
- B) Sono tutti cavalieri
- C) C'è un numero pari di persone
- D) C'è un numero dispari di persone



ALTRI ESEMPI

Lo stesso tavolo di prima. Ma ciascuno di loro afferma che la persona alla sua destra è un cavaliere. Cosa si può dedurre?

- A) Sono tutti furfanti oppure tutti cavalieri
- B) Sono tutti cavalieri
- C) Sono tutti furfanti
- D) C'è un numero pari di persone



ESEMPIO

Quale delle seguenti affermazioni implica che *“Socrate non è un bipede mortale”*?

- a) Se Socrate è un uomo, allora non è mortale.
- b) Se Socrate è un uomo, allora non è bipede.
- c) Se Socrate è bipede, allora non è mortale.
- d) Se Socrate è bipede, allora è mortale.

Osservazione: le risposte a e b sono folcloristiche.
Perché?

ESEMPIO

c) Se Socrate è bipede, allora non è mortale.

d) Se Socrate è bipede, allora è mortale.

Quale implica che “Socrate non è un bipede mortale”?

Osservazione. “Socrate non è un bipede mortale” è la negazione di un ‘e’:

non (S è bipede e S è mortale)

che equivale a

S non è bipede oppure S non è mortale

se quindi S è bipede allora

ESEMPIO

c) Se Socrate è bipede, allora non è mortale.

d) Se Socrate è bipede, allora è mortale.

Quale implica che “Socrate non è un bipede mortale”?

Osservazione. “Socrate non è un bipede mortale” è la negazione di un ‘e’:

non (S è bipede e S è mortale)

che equivale a

S non è bipede oppure S non è mortale

se quindi S è bipede allora

CONCLUSIONI

Non è facile insegnare ‘trucchi’ per svolgere i test di logica

Si può tentare di dare qualche suggerimento

Non faresi prendere dal panico

Cercare di usare il buon senso.

CONCLUSIONI

Tenere presenti le relazioni tra i vari connettivi
in particolare tenere presente come si comporta
la negazione